MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

58. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 20. MAI 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

58. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Witt, E., Über freie Ringe und ihre Unterringe 113

Ladegast, K., Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen 115

Gaschütz, W., Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen 160

Hämisch, W., Die Hauptnorm als Determinante über endlichrangigen Algebren mit Einselement 171

Jurkat, W., und A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren 186

Richert, H.-E., Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem 204

Witt, E.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 113—114 (1953)

Über freie Ringe und ihre Unterringe.

Von

Ernst Witt.

O. Schreier hat 1927 den Satz bewiesen[1]):

In einer freien Gruppe sind alle Untergruppen wieder frei.

Es entsteht die Frage, ob es andere freie Strukturen mit ähnlicher Eigenschaft gibt. (Unter Struktur wird hier eine Algebra im Sinne von Birkhoff mit Regeln verstanden.) Ein bekanntes Beispiel bieten die freien abelschen Gruppen:

Jede Untergruppe $\mathfrak{B}$ einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ ist wieder frei.

Beweis. $\{a_\nu\}$ sei eine wohlgeordnete linear unabhängige Basis von $\mathfrak{A}$. δ_ν bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten λ_ν derjenigen Elemente aus $\mathfrak{B}$, die die Gestalt $\sum_{\iota \leq \nu} \lambda_\iota a_\iota$ haben. Falls $\delta_\nu \neq 0$ ist, sei b_ν eines dieser Elemente mit $\lambda_\nu = \delta_\nu$. Diese b_ν sind dann linear unabhängig und erzeugen, wie sich durch transfinite Induktion ergibt, die Untergruppe $\mathfrak{B}$. (Während im allgemeinen der Wohlordnungssatz vorteilhaft durch den Satz von Zorn ersetzt werden kann, liegt im vorliegenden Beweise ein Fall vor, bei dem der Wohlordnungssatz selbst in natürlicher Weise zur Geltung kommt.)

Ein einfaches Beispiel sind auch die *Moduln über einem Schiefkörper.* Nach dem Satz von Hamel besitzen sie immer eine linear unabhängige Basis (wie sofort aus dem Satz von Zorn folgt), daher sind alle Moduln, also auch alle Untermoduln frei.

Dagegen zeigt sich, daß sich die *freien assoziativen Ringe* $\mathfrak{A}$ *andersartig* verhalten. Wir können uns auf eine Erzeugende x beschränken. $\mathfrak{A}$ besteht dann aus allen Polynomen $f(x)$ ohne konstantes Glied. Zunächst sieht man: $\mathfrak{A}$ enthält keinen freien Unterring mit zwei Erzeugenden f, g. Denn $f^\alpha g^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ wären sonst m^2 linear unabhängige Polynome vom Grade $\leq m \cdot \operatorname{Grad} f\, g$, und das ist für genügend großes m sicher falsch. Nun ergibt sich: Der von x^2, x^3 erzeugte Unterring $\mathfrak{B}$ ist nicht frei. Denn $\mathfrak{B}$ hätte dann nur eine Erzeugende f vom Grade $n \geq 2$, und wegen $x^2 = \varphi(f)$, $x^3 = \psi(f)$ wäre n gemeinsamer Teiler von 2 und 3, was nicht geht.

Es gibt dagegen *nichtassoziative Ringe*, für welche sich der Satz von Schreier übertragen läßt. Verstehen wir unter einem *Ring* eine additive Gruppe G, in der nur eine beiderseits distributive Multiplikation erklärt ist,

[1]) Schreier, O.: Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 161—183 (1927).

so läßt sich der folgende Satz aussprechen, dessen direkter Beweis das Ziel dieser Arbeit ist[2]):

Satz. *In einem freien Ring ist jeder Unterring wieder frei.*

Bemerkung. Verstehen wir analog unter einem *Multiring* eine additive Gruppe G, in der noch eine multilineare Verknüpfung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erklärt ist, so läßt sich der Beweis des vorangehenden Satzes ohne Mühe hierauf erweitern: *In einem freien Multiring ist jeder Untermultiring wieder frei.* In einer weiteren Arbeit soll der tieferliegende und wegen seiner Anwendung auf die Gruppentheorie und die kombinatorische Topologie wichtigere Satz bewiesen werden:

In einem freien LIE*schen Ring ist jeder Unterring wieder frei*[3]).

$\mathfrak{A}$ sei ein von den Elementen x_ι erzeugter freier Ring, $\mathfrak{B}$ ein Unterring (mit einem Körper K als Koeffizientenbereich). $\mathfrak{A}_n$ bezeichne den Modul der Elemente von $\mathfrak{A}$ vom Grad $\leq n$ in den x_ι, und es sei $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{B}$.

Um zu beweisen, daß $\mathfrak{B}$ ein freier Ring ist, sollen rekursiv Mengen B_n, C_n linear unabhängiger Elemente gebildet werden mit

$$C_n = B_n \cup \bigcup_1^{n-1} C_\nu C_{n-\nu}$$

in der Weise, daß C_n linear $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_{n-1}$ erzeugt. Ist bereits C_ν für alle $\nu < n$ gebildet, so kann C_ν zu einer linear unabhängigen Basis A_ν von $\mathfrak{A}_\nu/\mathfrak{A}_{\nu-1}$ ergänzt werden. Da $\mathfrak{A}$ ein freier Ring ist, ist die Menge

$$\bigcup_1^{n-1} A_\nu A_{n-\nu} \bmod \mathfrak{A}_{n-1}$$

linear unabhängig. Folglich erst recht die Menge

$$\bigcup_1^{n-1} C_\nu C_{n-\nu} \bmod \mathfrak{B}_{n-1},$$

und diese Menge kann dann mittels B_n zu einer linear unabhängigen Basis C_n von $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_{n-1}$ ergänzt werden.

Die Elemente aus B_μ denken wir uns mit dem Gewicht μ versehen und berechnen entsprechend das Gewicht für Monome aus $\bigcup_1^\infty B_\mu$. Durch Induktion nach n folgt, daß C_n genau aus den verschiedenen derartigen Monomen vom Gewicht n besteht. Nun ist aber $\bigcup_1^\infty C_n$ eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{B}$, also ist $\bigcup_1^\infty B_\mu$ ein System freier Erzeugender von $\mathfrak{B}$, q. e. d.

[2]) Diesen Satz hat A. KUROSH auf andere Weise bewiesen, nämlich zunächst für Ringe mit einer Erzeugenden, in denen dann freie Unterringe mit abzählbar vielen Erzeugenden nachgewiesen werden; das genügt. Vgl. KUROSH, A.: Nonassociative free algebras and free product of algebras. Mat. Sbornik, N. Ser. **20** (**62**), 239—262 (1947) (russisch mit engl. Zusammenfassung).

[3]) Diesen Satz habe ich 1937 vermutet, aber erst 1940 beweisen können. 1942 habe ich darüber in Berlin und 1944 in Göttingen vorgetragen.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 16. Oktober 1952.)

LADEGAST, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 115—159 (1953)

Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen.

Von
KONRAD LADEGAST.

§ 1. Vorbemerkungen.

Aus einer leichten Verallgemeinerung des BIEBERBACHschen Flächensatzes lassen sich eine Anzahl von Eigenschaften der schlichten Funktionen ableiten, von denen einige meines Wissens nicht in der Literatur enthalten sind, und die daher nachstehend veröffentlicht werden sollen.

Abweichend von dem allgemeinen Gebrauch werden im folgenden Funktionen betrachtet, die nicht im Einheitskreise, sondern in einem festen Kreise $|z|<R$ schlicht sind. Diese Formulierung bietet die Möglichkeit zu einer Umkehrung der Fragestellung, d.h. es kann an einigen Stellen die Frage beantwortet werden, in welchem Kreise höchstens eine in einem Punkte reguläre Funktion auch schlicht sein kann.

Ausnahmslos wird in den untenstehenden Formeln unter $f(z)$ eine im Kreise $|z|<R$ schlichte und reguläre Funktion verstanden, die im Nullpunkt verschwindet,

$$f(z)=c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\cdots, \tag{1}$$

unter $F(z)$ eine in demselben Kreise schlichte Funktion, die im Punkte p, $0<|p|<R$, einen Pol mit dem Hauptteil $\frac{P}{z-p}$ besitzt, und deren Entwicklung im Kreise $|z|<|p|$

$$F(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\cdots \tag{2}$$

lautet, und schließlich unter $g(z)$ eine ebenfalls für $|z|<R$ schlichte Funktion mit Pol im Nullpunkt,

$$g(z)=b_{-1} z^{-1}+b_0+b_1 z+b_2 z^2+\cdots. \tag{3}$$

Mit $N_1, N_2, N_3, \ldots$ werden Zahlen bezeichnet, die unter den Werten einer schlichten Funktion im Innern des Kreises $|z|<R$ nicht vorkommen, mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ Randwerte.

§ 2. Der verallgemeinerte Flächensatz und eine aus ihm hervorgehende allgemeine Funktionalungleichung für schlichte Funktionen.

Aus der schlichten Funktion $f(z)$ [§ 1, (1)] läßt sich eine von zwei Parametern z_1 und z_2, $|z_1|, |z_2|<R$, abhängige schlichte Funktion

$$\varphi(t)=\frac{1}{f\left(R^2\,\frac{z_1+t}{R^2+\bar{z}_1 t}\right)-f(z_2)} \tag{1}$$

herleiten. Diese besitzt einen Pol p, der sich aus der Gleichung

$$R^2 \frac{z_1 + p}{R^2 + \bar{z}_1 p} = z_2$$

mit

$$p = R^2 \frac{z_2 - z_1}{R^2 - \bar{z}_1 z_2} \tag{2}$$

ergibt.

Es werde

$$t = r e^{i\vartheta}, \quad |p| < r < R$$

gesetzt. Die Bilder der Kreise $r = \text{Const.}$, falls ϑ von 0 auf 2π zunimmt, sind einfache geschlossene Kurven mit negativem Umlaufssinn. Das von einer solchen Bildkurve begrenzte Flächenstück besitzt also negativen Inhalt, d.h. es gilt die Formel

$$I = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(r e^{i\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\bar{\varphi}(r e^{-i\vartheta})] \, d\vartheta < 0. \tag{3}$$

Zu ihrer Auswertung dient die Reihendarstellung

$$\varphi(t) = \frac{\varkappa}{t - p} + k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots, \tag{4}$$

die auf nachstehende Formeln führt:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} [\bar{\varphi}(r e^{-i\vartheta})] = \frac{i \bar{\varkappa} r e^{-i\vartheta}}{(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2} - i (\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = -\frac{|\varkappa|^2 r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\vartheta} \, d\vartheta}{(r e^{i\vartheta} - p)(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2}$$

$$I_2 = \frac{\varkappa}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r e^{i\vartheta} - p} (\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots) \right] d\vartheta$$

$$I_3 = -\frac{\bar{\varkappa} r}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-i\vartheta}}{(r e^{-i\vartheta} - \bar{p})^2} (k_0 + k_1 r e^{i\vartheta} + k_2 r^2 e^{2i\vartheta} + \cdots) \right] d\vartheta$$

$$I_4 = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(k_0 + k_1 r e^{i\vartheta} + k_2 r^2 e^{2i\vartheta} + \cdots)(\bar{k}_1 r e^{-i\vartheta} + 2 \bar{k}_2 r^2 e^{-2i\vartheta} + \cdots)] \, d\vartheta.$$

Die Integration ergibt

$$I_1 = -\frac{|\varkappa|^2 r}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{p}{r^2} e^{-i\vartheta} + \frac{p^2}{r^3} e^{-2i\vartheta} + \cdots \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\bar{p}}{r^3} e^{i\vartheta} + \frac{3\bar{p}^2}{r^4} e^{2i\vartheta} + \cdots \right) \right] d\vartheta$$

$$= -|\varkappa|^2 r \pi \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2|p|^2}{r^5} + \frac{3|p|^4}{r^7} + \cdots \right) = -\frac{|\varkappa|^2 r^2 \pi}{(r^2 - |p|^2)^2}$$

$$I_2 = I_3 = 0$$

$$I_4 = \pi (|k_1|^2 r^2 + 2|k_2|^2 r^4 + 3|k_3|^2 r^6 + \cdots).$$

Mithin lautet der explizite Ausdruck von (3) vermöge (4):

$$(5)\qquad \begin{cases} -\dfrac{|\varkappa|^2}{(r^2-|p|^2)^2}+|k_1|^2+2|k_2|^2r^2+3|k_3|^2r^4+\cdots<0 \\ \text{für jedes } r,\quad |p|<r<R. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$|k_1|<\frac{|\varkappa|}{r^2-|p|^2}$$

und sogar

$$(6)\qquad |k_1|\leqq\frac{|\varkappa|}{R^2-|p|^2}.$$

Es handelt sich nun darum, die Größen k_1 und $\varkappa$ durch $f(z)$ auszudrücken. Aus (4), (1) und (2) folgt

$$\varkappa=\lim_{t=p}[(t-p)\varphi(t)]=-\frac{(R^2+\bar{z}_1p)^2}{f'\left(R^2\dfrac{z_1+p}{R^2+\bar{z}_1p}\right)R^2(R^2-|z_1|^2)}=\frac{R^2(R^2-|z_1|^2)}{(R^2-\bar{z}_1z_2)^2f'(z_2)}.$$

Hieraus und aus den gleichen Formeln findet man

$$k_1=\varphi'(0)+\frac{\varkappa}{p^2}=-\frac{f'(z_1)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2}+\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2(z_2-z_1)^2f'(z_2)}.$$

Durch Substitution der Werte von $k_1, \varkappa, p$ geht (6) über in

$$\left|\frac{-f'(z_1)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2}+\frac{R^2-|z_1|^2}{R^2(z_2-z_1)^2f'(z_2)}\right|\leqq\frac{R^2-|z_1|^2}{[|R^2-\bar{z}_1z_2|^2-R^2|z_2-z_1|^2]\,|f'(z_2)|},$$

$$\left|\frac{f'(z_1)f'(z_2)}{(f(z_2)-f(z_1))^2}-\frac{1}{(z_2-z_1)^2}\right|\leqq\frac{R^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}.$$

Diese Funktionalungleichung ist offenbar invariant gegenüber ganzen linearen Transformationen der abhängigen Variablen. Sie ist es auch gegenüber gebrochenen, da sie insbesondere durch die Transformation $f(z)=\dfrac{1}{F(z)-N}$ in sich übergeht. Also gilt allgemein

$$(7)\qquad \left|\frac{F'(z_1)F'(z_2)}{(F(z_2)-F(z_1))^2}-\frac{1}{(z_2-z_1)^2}\right|\leqq\frac{R^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}.$$

Die Funktionalungleichung ist auch invariant gegenüber linearen Transformationen der unabhängigen Variablen, die den Kreis $|z|\leqq R$ in sich überführen. Dies geht aus folgenden Gleichungen hervor:

$$(8)\qquad \begin{cases} z=\varepsilon R^2\dfrac{s+\alpha}{R^2+\bar{\alpha}s}, & |\alpha|<R, \quad |\varepsilon|=1 \\ F(z)=\Phi(s), & F'(z)=\Phi'(s)\bar{\varepsilon}\dfrac{(R^2+\bar{\alpha}s)^2}{R^2(R^2-|\alpha|^2)} \\ z_2-z_1=\varepsilon R^2\dfrac{(R^2-|\alpha|^2)(s_2-s_1)}{(R^2+\bar{\alpha}s_1)(R^2+\bar{\alpha}s_2)}, & R^2-|z|^2=R^2\dfrac{(R^2-|\alpha|^2)(R^2-|s|^2)}{|R^2+\bar{\alpha}s|^2}. \end{cases}$$

Um festzustellen, ob es schlichte Funktionen gibt, für die in (7) das Gleichheitszeichen gilt, möge von der Funktion $\varphi(t)$ ausgegangen werden. Wenn für eine

schlichte Funktion die Ungleichung (6) in eine Gleichung übergehen soll, muß sein

$$k_2 = k_3 = k_4 = \cdots = 0;$$

es werde gesetzt

$$\varkappa = \lambda k_1 (R^2 - |p|^2), \qquad |\lambda| = 1;$$

dafür, daß

$$\varphi(t) = \frac{\varkappa}{t-p} + k_0 + k_1 t$$

schlicht ausfällt, ist notwendig und hinreichend, daß jedem Werte t_1, $|t_1| < R$, vermöge der Gleichung $\varphi(t_2) = \varphi(t_1)$ ein t_2, $|t_2| > R$ zugeordnet wird. Der einzige Wert von λ, der dieser Bedingung genügt, ist $\lambda = -\frac{p}{\bar{p}}$. Es gilt dann

$$t_2 = \frac{p}{\bar{p}} \frac{\bar{p} t_1 - R^2}{t_1 - p},$$

d.h. $\varphi(t)$ gestattet eine Transformation, die das Kreisinnere in das Kreisäußere und den Rand in sich überführt. Diese Eigenschaft überträgt sich gemäß Gl. (1) auf $f(z)$. Zwecks genauer Feststellung der Schrankenfunktionen ist also in (7) eine gebrochene Funktion zweiten Grades zu substituieren, die eine Transformation der bezeichneten Art zuläßt. Nach Anwendung einer linear gebrochenen Transformation darf die Funktion zweiten Grades ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$F(z) = \frac{2Rz + \alpha z^2}{(R + \beta z)^2} \tag{9}$$

angesetzt werden. Aus

$$F(z_2) - F(z_1) = \frac{R(z_2 - z_1)}{(R + \beta z_1)^2 (R + \beta z_2)^2} [2R^2 + \alpha R(z_1 + z_2) + 2\beta(\alpha - \beta) z_1 z_2]$$

findet man nach kurzer Rechnung als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Möglichkeit einer Transformation der obengenannten Art:

$$|\beta| = |\gamma| = |\alpha - \beta| = 1, \qquad \gamma \neq \beta. \tag{10}$$

Die Substitution von $F(z)$ in (7) führt auf

$$\left| \frac{4(R + \beta z_1)(R + \beta z_2)(R + \gamma z_1)(R + \gamma z_2)}{[2R^2 + \alpha R(z_1 + z_2) + 2\beta\gamma z_1 z_2]^2} - 1 \right| \leq \frac{R^2 |z_2 - z_1|^2}{(R^2 - |z_1|^2)(R^2 - |z_2|^2)},$$

woraus man nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von (10)

$$|\,|\alpha|^2 (R^2 + \bar{z}_1 z_2) + 2R(\bar{\alpha}\bar{z}_1 + \alpha z_2)\,| \geq 0$$

findet. Gleichheit tritt in dieser Relation nur ein für

$$z_2 = -\frac{\bar{\alpha} R}{\alpha} \frac{\alpha R + 2\bar{z}_1}{2R + \bar{\alpha}\bar{z}_1}. \tag{11}$$

Im Falle $\alpha = 0$ lautet die Bedingung

$$z_2 = \bar{\beta}^2 \bar{z}_1. \tag{12}$$

Diese Gleichungen ordnen umkehrbar eindeutig jedem Punkt z_1, $|z_1| \leq R$, einen Punkt z_2, $|z_2| \leq R$, zu. Offenbar bleibt diese Eigenschaft bei jeder Transformation der unabhängigen Variablen, die den Kreis in sich überführt, erhalten.

Satz 1. *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Relation*

$$\left| \frac{F'(z_1)\,F'(z_2)}{[F(z_2) - F(z_1)]^2} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \right| \leq \frac{R^2}{(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)}.$$

Die Ungleichung ist invariant gegenüber linearen Transformationen der unabhängigen Variablen, die den Kreis $|z| \leq R$ in sich überführen, und gegenüber beliebigen linearen Transformationen der abhängigen Variablen. Ausschließliche Schrankenfunktionen sind die gebrochenen Funktionen zweiten Grades gemäß den Gl. (9) *und* (10) *sowie deren linear gebrochene Funktionen; Gleichheit tritt ein für die Wertepaare laut Gl.* (11) *bzw.* (12).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Koebeschen Schrankenfunktionen, die sich aus (9) für $\alpha = 0$ ergeben. Die nähere Durchrechnung zeigt, daß auch die aus vorstehendem Satze durch Abschwächung hervorgehende Formel

$$(13) \qquad \frac{|F'(z_1)\,F'(z_2)|}{|F(z_1) - F(z_2)|^2} \leq \frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2\,(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)}$$

scharf ist und dieselben Schrankenfunktionen besitzt.

§ 3. Anwendung der Funktionalungleichung von § 2 auf Funktionen mit reeller Potenzreihenentwicklung und ungerade Funktionen.

Als erste Anwendung des Satzes 1 bzw. der Formel (13) § 2, erhält man für schlichte Funktionen, die eine Potenzreihenentwicklung mit reellen Koeffizienten besitzen, wenn man $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$ setzt,

$$(1) \qquad \left| \frac{F'(z)}{F(z) - F(\bar{z})} \right| \leq \frac{|R^2 - z^2|}{|z - \bar{z}|\,(R^2 - |z|^2)}.$$

Wie man aus den Formeln (9) bis (12), § 2 entnimmt, geht diese Ungleichung in eine Gleichung über für die Funktion $\frac{z}{(R \pm z)^2}$ und ihre reellen linear gebrochenen Funktionen und zwar für jedes z, $|z| < R$.

Allgemein ist zu bemerken, daß mit Ausnahme des Falles von § 2 kein Beweis dafür vorliegt, daß die jeweils genannten Schrankenfunktionen die einzigen sind.

Zu weiterreichenden Folgerungen führt die Behandlung der ungeraden Funktionen. Diese müssen von der Form (1) oder (3), § 1, sein[1]). In beiden Fällen liefert Ungleichung (7), § 2, für $z_1 = z$, $z_2 = -z$ den

Satz 2: *Eine schlichte ungerade Funktion $f(z)$ oder $g(z)$ genügt im Kreise $|z| < R$ der Ungleichung*

$$\left| \left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^2 - \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{4R^2}{(R^2 - |z|^2)^2} \quad \textit{bzw.} \quad \left| \left[\frac{g'(z)}{g(z)}\right]^2 - \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{4R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}.$$

[1]) Offenbar vermeidet $g(z)$ den Wert 0 im Kreisinnern.

Diese Ungleichungen besitzen die Schrankenfunktionen

$$f(z) = \frac{C z}{R^2 - \varepsilon^2 z^2}, \qquad g(z) = \frac{R^2 - \varepsilon^2 z^2}{C z},$$

die für die Werte $z_2 = \pm \bar{\varepsilon} |z|$ *Gleichheit hervorrufen.*

Die letzte Aussage entnimmt man den Formeln (9) bis (12), § 2.

Die erste Ungleichung des Satzes 2 läßt sich etwas abschwächen in

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqq \frac{R^2 + |z|^2}{|z| (R^2 - |z|^2)}. \tag{2}$$

Die Ungleichung (2) läßt sich sowohl längs eines Radius als auch längs der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt leicht integrieren. Zunächst sei in $z = r e^{i\vartheta}$ ϑ konstant, $r_2 \geqq r_1$. Setzt man $f(z) = h(r)$, so ist

$$\left| \frac{h'(r)}{h(r)} \right| \leqq \frac{R^2 + r^2}{r(R^2 - r^2)},$$

$$\left| \lg \left[\frac{h(r_2)}{h(r_1)} \right] \right| = \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{h'(r)}{h(r)} \, dr \right| \leqq \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{h'(r)}{h(r)} \right| dr \leqq \int_{1}^{r_2} \frac{R^2 + r^2}{r(R^2 - r^2)} \, dr;$$

$$\left| \lg \left[\frac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \right| \leqq \lg \left[\frac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)} \right], \quad \text{falls} \quad r_2 \geqq r_1. \tag{3}$$

Eine leichte Abschwächung dieses Resultates führt auf

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right| \leqq \dfrac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)}, \\ \arg \left[\dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \leqq \dfrac{r_2 (R^2 - r_1^2)}{r_1 (R^2 - r_2^2)}, \end{array} \right\} \quad \text{falls} \quad r_2 \geqq r_1. \tag{4}$$

Aus der ersten dieser Ungleichungen entnimmt man durch den Grenzübergang $\lim r_1 = 0$

$$|f(z)| \leqq \frac{|f'(z)| \, R^2 |z|}{R^2 - |z|^2}, \tag{5}$$

in Verbindung mit (2)

$$|f'(z)| \leqq |f'(0)| \, R^2 \frac{R^2 + |z|^2}{(R^2 - |z|^2)^2}. \tag{6}$$

Die Ungleichungen (2) bis (6) besitzen mit Ausnahme der zweiten Relation (4) dieselbe Schrankenfunktion wie Satz 2.

Sieht man andererseits in $z = r e^{i\vartheta}$ r als konstant an und setzt $f(z) = \psi(\vartheta)$, so erhält man aus (2)

$$\left| \frac{\psi'(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} \right| \leqq \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2},$$

$$\left| \lg \left[\frac{\psi(\vartheta_2)}{\psi(\vartheta_1)} \right] \right| \leqq \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \, d\vartheta, \quad (\vartheta_2 \geqq \vartheta_1)$$

$$\left| \lg \left[\frac{f(r e^{i\vartheta_2})}{f(r e^{i\vartheta_1})} \right] \right| \leqq (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_2 \geqq \vartheta_1. \tag{7}$$

Für diese Abschätzung ist keine Schrankenfunktion bekannt.

Weitere Eigenschaften schlichter ungerader Funktionen ergeben sich in einem späteren Stadium der Untersuchung. Sie befinden sich § 5 (5), § 7 (5) bis (7) und (21). Darüber hinaus kann durch Umkehrung des im nächsten Paragraphen zu erörternden Prinzips aus jeder eine Funktion $f(z)$ enthaltenden Ungleichung eine solche für eine ungerade Funktion gewonnen werden.

§ 4. Übertragung der Ergebnisse von § 3 auf allgemeine schlichte Funktionen. Herleitung einer zweiten allgemeinen Funktionalungleichung nebst Anwendungen.

Die Übertragung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf im Kreisinnern reguläre allgemeine schlichte Funktionen erfolgt auf Grund der bekannten Gleichungen

$$f(z) = q^2(t), \quad z = t^2;$$

hierin bedeutet $q(t)$ eine im Innern des Kreises $|t| < \sqrt{R}$ schlichte und reguläre ungerade Funktion, die folglich im Nullpunkt verschwindet. Setzt man die Ungleichungen von § 3 für $q(t)$ an und berücksichtigt die Beziehung

$$q'(t) = f'(z) \sqrt{\frac{z}{f(z)}},$$

so erhält man aus Satz 2:

(1) $$\left| \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]^2 - \frac{1}{z^2} \right| \leq \frac{4R}{|z|\,(R-|z|)^2}$$

aus (2):

(2) $$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{R+|z|}{|z|\,(R-|z|)}$$

aus (3):

(3) $$\left| \lg \left[\frac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \right| \leq \lg \left[\frac{r_2 (R-r_1)^2}{r_1 (R-r_2)^2} \right], \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1,$$

aus (4):

(4) $$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right| \leq \left| \dfrac{r_2}{r_1} \right| \left| \dfrac{R-r_1}{R-r_2} \right|^2, \\ \operatorname{arc} \left[\dfrac{f(r_2 e^{i\vartheta})}{f(r_1 e^{i\vartheta})} \right] \leq \left| \dfrac{r_2}{r_1} \right| \left| \dfrac{R-r_1}{R-r_2} \right|^2, \end{array} \right\} \quad \text{falls} \quad r_2 \geq r_1$$

aus (5):

(5) $$|f(z)| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2\,|z}{(R-|z|)^2}$$

aus (7):

(6) $$\left| \lg \left[\frac{f(r e^{i\vartheta_2})}{f(r e^{i\vartheta_1})} \right] \right| \leq (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{R+r}{R-r}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_2 \geq \vartheta_1.$$

Die Verbindung der vorstehenden Ungleichungen (2) und (5) liefert:

(7) $$|f'(z)| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2 (R+|z|)}{(R-|z|)^3},$$

Von diesen Resultaten sind die Ungleichungen (2), (5) und (7) bereits bekannt. Schrankenfunktion dieser Relationen außer der zweiten (4) und (6) ist die KOEBEsche Funktion $\frac{Cz}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, für die Werte, die auf der Geraden $z=\bar{\varepsilon}|z|$ liegen. Dies ergibt sich aus dem entsprechenden Resultat in § 3.

Eine erste Verallgemeinerung der Ungleichung (1) läßt sich durch eine lineare Transformation des Kreises $|z|\leq R$ in sich erzielen.

Es wird unter Einführung einer willkürlichen Konstanten z_0 gesetzt

$$t=R^2\,\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z},\qquad |z_0|<R$$

$$\varphi(t)=f(z)-f(z_0)$$

$$\varphi'(t)=f'(z)\,\frac{(R^2-\bar{z}_0 z)^2}{R^2(R^2-|z_0|^2)}$$

Führt man diese Werte in die auf $\varphi(t)$ angewandte Ungleichung (1) ein, so findet man

$$\left|\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}\right]^2-\left[\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(R^2-\bar{z}_0 z)}\right]^2\right|\leq\frac{4R[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|\,(R^2-|z|^2)^2}. \tag{8}$$

Dieses Resultat läßt sich nochmals erweitern durch Einführung einer allgemeinen schlichten Funktion vermöge der Gleichungen

$$f(z)-f(z_0)=\frac{F(z)-F(z_0)}{F(z)-N},\qquad f'(z)=\frac{F(z_0)-N}{[F(z)-F(z_0)]^2}F'(z).$$

Dadurch erhält man nachstehenden Satz, in welchem die Schrankenfunktion in derselben Weise aus derjenigen von Formel (1) hervorgeht, wie der Satz selbst aus dieser Formel abgeleitet ist.

Satz 3. *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Inneren des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left\{\frac{[F(z_0)-N]F'(z)}{[F(z)-F(z_0)][F(z)-N]}\right\}^2-\left\{\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(R^2-\bar{z}_0 z)}\right\}^2\leq\frac{4R[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|\,(R^2-|z|^2)^2}.$$

Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion

$$F(z)=\frac{A[(R^2-\bar{z}_0 z)^2+\varepsilon^2 R^2(z-z_0)^2]+B(R^2-\bar{z}_0 z)(z-z_0)}{C[(R^2-\bar{z}_0 z)^2+\varepsilon^2 R^2(z-z_0)^2]+D(R^2-\bar{z}_0 z)(z-z_0)},\qquad |\varepsilon|=1$$

mit der Nebenbedingung

$$N=\frac{2\varepsilon AR+B}{2\varepsilon CR+D}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls z auf dem durch die Gleichung

$$\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}=\bar{\varepsilon}\,\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}$$

gegebenen Bogen eines Orthogonalkreises zu $|z|=R$ liegt.

Aus der für die Schrankenfunktion gegebenen Formel scheint hervorzugehen, daß diese von drei beliebigen komplexen Parametern sowie den

weiteren Parametern $z_0, |z_0| < R$, und $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, abhängt. Diese Größen treten jedoch in derartigen Verbindungen auf, daß als wesentliche Parameter nur übrigbleiben: Drei komplexe und zwei vom absoluten Betrage 1. Das erkennt man aus der Betrachtung der speziellen in obigem Ausdruck enthaltenen Schrankenfunktion

$$f(z) = \frac{z_0}{(R + \varepsilon z_0)^2} + \frac{(z - z_0)(R^2 - \bar{z}_0 z)}{[(R^2 - \bar{z}_0 z) - \varepsilon R(z - z_0)]^2} = \frac{(R^2 - |z_0|^2)[(R^2 - \varepsilon^2 z_0^2) z + (\varepsilon^2 z_0 - \bar{z}_0) z^2]}{(R + \varepsilon z_0)^2 [R(R + \varepsilon z_0) - (\varepsilon R + \bar{z}_0) z]^2}.$$

Diese Funktion erweist sich bis auf einen Faktor als identisch mit der Funktion von § 2, (9) und (10)

$$\frac{2Rz + \alpha z^2}{(R + \beta z)^2}, \qquad |\beta| = |\alpha - \beta| = 1.$$

Durch eine leichte Abschwächung von Satz 3 oder durch eine Umformung von (2) analog derjenigen, die (1) in Satz 3 überführt, erhält man

$$(9) \qquad \left| \frac{[F(z_0) - N] F'(z)}{[F(z_0) - F(z)][F(z) - N]} \right| \leqq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| + R|z - z_0|]^2}{|z - z_0| |R^2 - \bar{z}_0 z| (R^2 - |z|^2)}.$$

Es ist dies eine Formel, die sich für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $R = 1$ bereits bei R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 86, Berlin 1936, in etwas abweichender Schreibweise findet. Für die Schrankenfunktion gilt das bei Satz 3 Gesagte. In gleicher Weise läßt sich Ungleichung (5) verallgemeinern in

$$(10) \qquad \left| \frac{[F(z) - N] F'(z_0)}{[F(z_0) - F(z)][F(z_0) - N]} \right| \geqq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| - R|z - z_0|]^2}{|z - z_0| |R^2 - \bar{z}_0 z| (R^2 - |z_0|^2)},$$

eine Formel, die der vorhergehenden vollkommen analog gebaut ist und über deren Schrankenfunktion das gleiche gilt. Aus ihr folgt, wenn $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $z = 0$ gesetzt und z an Stelle von z_0 geschrieben wird,

$$(11) \qquad \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \geqq \frac{R - |z|}{|z| (R + |z|)},$$

das bereits bekannte Gegenstück zu (2). Ebenso erhält man aus Ungleichung (7)

$$(12) \qquad \left| \frac{F'(z)}{F'(z_0)} \right| \left| \frac{F(z_0) - N}{F(z) - N} \right|^2 \leqq \frac{[|R^2 - \bar{z}_0 z| + R|z - z_0|]^4}{(R^2 - |z_0|^2)(R^2 - |z|^2)^3}$$

mit unveränderter Schrankenfunktion. Diese Relation wird in § 5, Satz 5 in etwas erweiterter Fassung nochmals bewiesen.

Setzt man in Satz 3 $z = 0$ und schreibt z an Stelle von z_0, so erhält man eine implizite Abschätzung für $F(z)$:

$$(13) \qquad \left| \left\{ \frac{[F(z) - N] F'(0)}{[N - F(0)][F(z) - F(0)]} \right\}^2 - \left(\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 z} \right)^2 \right| \leqq \frac{4(R + |z|)^2}{R^3 |z|},$$

die sich für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$ vereinfacht in

$$(14) \qquad \left| \left[\frac{f'(0)}{f(z)} \right]^2 - \left(\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 z} \right)^2 \right| \leqq \frac{4(R + |z|)^2}{R^3 |z|},$$

eine Formel, die eine Verschärfung der bekannten Verzerrungsformel

$$|f(z)| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 |z|}{(R+|z|)^2} \tag{15}$$

darstellt.

Hieraus gewinnt man durch Multiplikation mit (11) die Verzerrungsformel

$$|f'(z)| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 (R-|z|)}{(R+|z|)^3}. \tag{16}$$

Für eine im Kreise $|t|<R$ schlichte und reguläre, im Nullpunkt verschwindende Funktion $\varphi(t)$, deren Randwerte mit ϱ und deren Nichtbildpunkte mit N bezeichnet seien, findet man durch den Grenzübergang $|t| \to R$ aus (15)

$$|\varrho| \geq \frac{|\varphi'(0)|\, R}{4}$$

und erst recht

$$|N| \geq \frac{|\varphi'(0)|\, R}{4}.$$

Von $\varphi(t)$ geht man zu einer allgemeinen schlichten Funktion $\psi(t)$ über vermöge der Gleichung

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t) - \psi(0)}{\psi(t) - N_1};$$

es gilt dann ferner

$$\varphi'(t) = \frac{\psi(0) - N_1}{(\psi(t) - N_1)^2}\, \psi'(t), \qquad N = \frac{N_2 - \psi(0)}{N_2 - N_1};$$

somit ist

$$\left| \frac{N_2 - \psi(0)}{N_2 - N_1} \right| \geq \frac{|\psi'(0)|\, R}{4\,|N_1 - \psi(0)|}.$$

Hieraus findet man durch eine Transformation des Kreises in sich .

$$\left| \frac{F'(z)}{F(z) - N_1} - \frac{F'(z)}{F(z) - N_2} \right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}. \tag{17}$$

Radiale Integration dieser Formel und nachfolgende Transformation des Kreises in sich führt auf folgende Abschätzung für das Doppelverhältnis aus zwei Bild- und zwei Nichtbildpunkten:

$$\left| \lg \left[\frac{(F(z_2) - N_1)\,(F(z_1) - N_2)}{(F(z_1) - N_1)\,(F(z_2) - N_2)} \right] \right| \leq 2 \lg \left| \frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R\,|z_1 - z_2|}{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R\,|z_1 - z_2|} \right|. \tag{18}$$

Die Ungleichungen (17) und (18) sind scharf; sie besitzen die KOEBEsche Schrankenfunktion. In ihnen sind zwei von A. J. MACINTYRE gefundene Resultate enthalten [J. London Math. Soc. **11**, 7—11 (1936)]. Dort handelt es sich um schlichte, im Einheitskreis reguläre Funktionen, die im Kreisinnern den Wert $\frac{1}{4}$ nicht erreichen, für die also gilt:

$$F(z) = f(z), \quad \lim N_1 = \infty, \quad N_2 = \tfrac{1}{4}, \quad R = 1.$$

Aus (17) erhält man mit MACINTYRE für derartige Funktionen

$$\left| \frac{f'(z)}{1 - 4 f(z)} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

und ebenso aus (18), falls $z_2 = 0$:

$$|\lg[1 - 4f(z)]| \leq 2 \lg\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Durch den Grenzübergang $z_1 \to p$ geht Ungleichung (18) über in

$$\left|\lg\left[\frac{F(z)-N_1}{(F(z)-N_2}\right]\right| \leq 2 \lg\left[\frac{|R^2 - \bar{p}z| + R|z-p|}{|R^2 - \bar{p}z| - R|z-p|}\right]. \tag{19}$$

Führt man den Grenzübergang $\lim z_0 = p$ durch, so nimmt Satz 3 die spezielle Gestalt

$$\left|\left[\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right]^2 - \left[\frac{R^2-|p|^2}{(z-p)(R^2-\bar{p}z)}\right]^2\right| \leq \frac{4R[|R^2-\bar{p}z| + R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)^2} \tag{20}$$

an. Ebenso findet man aus (9) und (10)

$$\frac{[|R^2-\bar{p}z| - R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)} \leq \left|\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right| \leq \frac{[|R^2-\bar{p}z| + R|z-p|]^2}{|z-p||R^2-\bar{p}z|(R^2-|z|^2)} \tag{21}$$

und:

$$\frac{[|R^2-\bar{p}z| - R|z-p|]^2}{(R^2-|p|^2)|z-p||R^2-\bar{p}z|} \leq \left|\frac{F(z)-N}{P}\right| \leq \frac{[|R^2-\bar{p}z| + R|z-p|]^2}{(R^2-|p|^2)|z-p||R^2-\bar{p}z|}. \tag{22}$$

§ 5. Herleitung einer dritten allgemeinen Funktionalungleichung aus derjenigen von § 4 und Integration derselben.

In der Ungleichung von Satz 3 soll der Grenzübergang $\lim z_0 = z$ vorgenommen werden. Schreibt man $z_0 = z + dz$, so lautet sie

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)}\right|^2 \left[\frac{F(z+dz)-N}{F(z)-N}\right]^2 - \left[\frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right]^2$$
$$\leq \frac{4R[|R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}| + R|dz|]^2}{|dz||R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}|(R^2-|z|^2)^2}.$$

Der absolute Betrag auf der linken Seite läßt sich in zwei Faktoren zerlegen. Der erste ist

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)}\,\frac{F(z+dz)-N}{F(z)-N} + \frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right| = \frac{|2+O(dz)|}{|dz|},$$

der zweite

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z+dz)-F(z)} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} - \frac{R^2-|z+dz|^2}{dz(R^2-|z|^2-z\,d\bar{z})}\right|$$
$$= \left|\frac{F'(z)}{F'(z)\,dz + \frac{1}{2}F''(z)\,dz^2 + \cdots} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} - \frac{1}{dz}\left[1 - \frac{\bar{z}\,dz + |dz|^2}{R^2-|z|^2-z\,d\bar{z}}\right]\right|$$
$$= \left|-\frac{F''(z)}{2F'(z)} + \frac{F'(z)}{F(z)-N} + \frac{\bar{z}}{R^2-|z|^2} + O(dz)\right|.$$

Der Grenzübergang liefert also den

Satz 4: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2:*

$$\left|\frac{F''(z)}{F'(z)} - \frac{2F'(z)}{F(z)-N} - \frac{2\bar{z}}{R^2-|z|^2}\right| \leq \frac{4R}{R^2-|z|^2}.$$

Sie besitzt insbesondere die Schrankenfunktion $\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, *wobei* $\lim N=\infty$ *oder* $N=-\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}$ *zu wählen ist und das Gleichheitszeichen für* $z=\pm\bar{\varepsilon}|z|$ *gilt; die Kombination der je zwei Möglichkeiten für N und z ist frei.*

Die Invarianzeigenschaften und die Schrankenfunktionen bestätigt man leicht durch Rechnung.

Das allgemeine Integral von Satz 4 läßt sich am schnellsten in zwei Etappen bestimmen. Die Ungleichung werde zunächst für $\varphi(t)$, $0\leq t<R$, geschrieben

$$\left|\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}-\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)-N}-\frac{2t}{R^2-t^2}\right|\leq\frac{4R}{R^2-t^2},$$

woraus man durch Integration findet

$$\lg\left[\frac{\varphi'(t)\,(\varphi(0)-N)^2\,(R^2-t^2)}{\varphi'(0)\,(\varphi(t)-N)^2\,R^2}\right]\leq 2\lg\left(\frac{R+t}{R-t}\right).$$

Setzt man nun

$$t=\varepsilon R^2\frac{z-z_1}{R^2-\bar{z}_1 z},\qquad \varepsilon=\frac{(\bar{z}_2-\bar{z}_1)\,(R^2-\bar{z}_1 z_2)}{|z_2-z_1|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|},$$

$$\varphi(t)=F(z),\qquad \varphi'(t)=F'(z)\,\bar{\varepsilon}\,\frac{(R^2-\bar{z}_1 z)^2}{R^2(R^2-|z_1|^2)},$$

so erhält man für $z=z_2$ den

Satz 5: *Eine allgemeine schlichte Funktion* $F(z)$ *genügt im Innern des Kreises* $|z|<R$ *der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\lg\left[\frac{F'(z_2)\,(F(z_1)-N)^2\,(R^2-|z_2|^2)\,(R^2-\bar{z}_1 z_2)}{F'(z_1)\,(F(z_2)-N)^2\,(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-z_1\bar{z}_2)}\right]\leq 2\lg\left[\frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|}\right].$$

Zu den Schrankenfunktionen der Ungleichung gehört

$$F(z)=\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2},\qquad |\varepsilon|=1,$$

und zwar tritt Gleichheit ein für

$$z_1=\sigma_1\bar{\varepsilon}|z_1|,\qquad z_2=\sigma_2\bar{\varepsilon}|z_2|,\qquad \sigma_1=\pm 1,\qquad \sigma_2=\pm 1$$

verbunden mit

$$\lim N=\infty\quad \textit{oder}\quad N=-\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}.$$

Die Kombination der verschiedenen Möglichkeiten ist frei.

Durch eine leichte Vergröberung findet man aus Satz 5:

$$\left|\frac{F'(z_2)\,(F(z_1)-N)^2}{F'(z_1)\,(F(z_2)-N)^2}\right|\leq\frac{[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_2-z_1|]^4}{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)^3},\tag{1}$$

wie bereits in § 4, (12). Der Wertebereich, innerhalb dessen die KOEBEsche Funktion $f(z)=\frac{z}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, Gleichheit herbeiführt, ist kleiner als in

Satz 5. Es sind nur folgende Kombinationen zulässig:

$\lim N = \infty$ mit	$N = -\frac{\bar{\varepsilon}}{4R}$ mit
$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = +1$	$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = -1$
$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = +1$ für $\lvert z_2\rvert \geqq \lvert z_1\rvert$	$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = -1$ für $\lvert z_2\rvert \geqq \lvert z_1\rvert$
$\sigma_1 = -1,\ \sigma_2 = -1$ für $\lvert z_2\rvert \leqq \lvert z_1\rvert$	$\sigma_1 = +1,\ \sigma_2 = +1$ für $\lvert z_2\rvert \leqq \lvert z_1\rvert$.

Für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$ geht (1) über in

$$\left|\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)}\right| \leqq \frac{[|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R|z_2 - z_1|]^4}{(R^2 - |z_1|^2)(R^2 - |z_2|^2)^3}, \tag{2}$$

eine Formel, aus der die Einsetzung von $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ die Relationen (7) und (16) aus § 4 liefert. — Aus Satz 5 entnimmt man, wenn man $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$, $z_1 = 0$, $z_2 = z$ setzt,

$$\left|\lg\left[\frac{f'(z)\,(R^2 - |z|^2)}{f'(0)\,R^2}\right]\right| \leqq 2\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right). \tag{3}$$

Dieses Resultat wurde für $f'(0) = 1$, $R = 1$ bereits von Grunsky gefunden, veröffentlicht: Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 1, Heft 3: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung einfach und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Aus (3) ist der Bieberbachsche Drehungssatz

$$\arc\left[\frac{f'(z)}{f'(0)}\right] \leqq 2\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right)$$

unmittelbar abzulesen.

Setzt man in der Formel von Satz 5 $z_2 = z$, $\lim z_1 = p$, so lautet sie

$$\left|\lg\left[\frac{F'(z)\,P(R^2 - |z|^2)(R^2 - \bar{p}z)}{(F(z) - N)^2 (R^2 - |p|^2)(R^2 - p\bar{z})}\right]\right| \leqq 2\lg\left[\frac{|R^2 - \bar{p}z| + R|z - p|}{|R^2 - \bar{p}z| - R|z - p|}\right], \tag{4}$$

Ist $f(z)$ eine *ungerade Funktion*, so liefert Satz 5 das einfache Ergebnis

$$\left|\lg\left[\left(\frac{f(z) - N}{f(z) + N}\right)^2\right]\right| \leqq 4\lg\left(\frac{R + |z|}{R - |z|}\right). \tag{5}$$

Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion $\frac{Cz}{R^2 + \varepsilon^2 z^2}$, $|\varepsilon| = 1$. Das Gleichheitszeichen gilt für $z = \pm\bar{\varepsilon}|z|$, falls gleichzeitig $N = \mp\frac{C\bar{\varepsilon}}{2R}$ gewählt wird.

Die Übertragung von (5) auf eine allgemeine schlichte Funktion des Typus $f(z)$ ergibt

$$\lg\left[\left(\frac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{N}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{N}}\right)^2\right] \leqq 4\lg\left(\frac{\sqrt{R} + \sqrt{|z|}}{\sqrt{R} - \sqrt{|z|}}\right). \tag{6}$$

Aus Satz 4 dieses Paragraphen folgt für $z = 0$

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{N - a_0}\right| \leqq \frac{2}{R}, \tag{7}$$

worin für $F(z) = f(z)$, $\lim N = \infty$ die bekannte Koeffizientenabschätzung

$$|c_2| \leqq \frac{2|c_1|}{R} \tag{8}$$

enthalten ist. Beide Ungleichungen liefern obere Schranken für den Radius des Kreises, innerhalb dessen eine Funktion schlicht bzw. schlicht und regulär sein kann.

Aus der letzten Formel entnimmt man den

Satz 6: *Eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion*

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots$$

kann höchstens in dem Kreise $|z| < \frac{2|C_1|}{|C_2|}$ *schlicht und regulär bleiben; ist sie in einem größeren Kreise um den Nullpunkt schlicht, so besitzt sie in dem abgeschlossenen Kreise* $|z| \leqq \frac{2|C_1|}{|C_2|}$ *einen Pol.*

Aus der auf eine Funktion $f(z)$ ($\lim N = \infty$) angewandten Ungleichung des Satzes 4

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2 - |z|^2} \right| \leqq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}$$

läßt sich eine Verallgemeinerung und Verschärfung der Relation § 4, (7) herleiten. Zunächst wird die eben erwähnte Spezialisierung von Satz 4 vermittels § 4, (7) abgeschwächt in

$$|(R^2 - |z|^2) f''(z) - 2\bar{z} f'(z)| \leqq \frac{4|f'(0)| R^3 (R + |z|)}{(R - |z|)^3}.$$

Durch radiale Integration erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} |(R^2 - |z_2|^2) f'(z_2) - (R^2 - |z_1|^2) f'(z_1)| \\ \qquad \leqq 4|f'(0)| R^3 \left[\frac{|z_2|}{(R - |z_2|)^2} - \frac{|z_1|}{(R - |z_1|)^2} \right], \\ \qquad \text{falls} \quad \arg z_2 = \arg z_1, \qquad |z_2| \geqq |z_1|. \end{array} \right. \tag{9}$$

Für $z_1 = 0$ folgt hieraus

$$|(R^2 - |z|^2) f'(z) - R^2 f'(0)| \leqq \frac{4|f'(0)| R^2 |z|}{(R - |z|)^2}, \tag{10}$$

worin die Aussage von § 4, (7) enthalten ist.

§ 6. Die Ersetzung von Nicht-Bildpunkten durch Bildpunkte in einigen Ungleichungen.

Als ein geeigneter Weg zur Weiterführung der Untersuchung erweist sich nach dem Vorgange von R. NEVANLINNA, der hierdurch aus dem KOEBEschen $\frac{1}{4}$-Satze die Ungleichung § 4, (9) fand, die Abbildung eines aufgeschlitzten Kreisbereiches der z-Ebene auf einen vollen Kreis der t-Ebene. Es wird dann von der schlichten Funktion nur die Schlichtheit, gegebenenfalls auch Regularität, im Schlitzbereiche benutzt. Durch die Abbildung $z \to t$ wird erreicht, daß dem Endpunkte des Schlitzes im Kreise der z umkehrbar eindeutig ein

Peripheriepunkt des Kreises der t und damit ein Randwert der schlichten Funktion von t entspricht.

Zur Herstellung der Abbildung $z \to t$ werde von den Gleichungen

$$w = t + \frac{R^2}{t} = A z + \frac{\bar{A} R^2}{z} + B, \qquad \bar{B} = B, \tag{1}$$

ausgegangen. Die Bilder der beiden Kreisperipherien in der w-Ebene sind die reellen Strecken

$$-2|A|R + B \leqq w \leqq 2|A|R + B \quad \text{und} \quad -2R \leqq w \leqq 2R;$$

dafür, daß das Bild der t-Peripherie dasjenige der z-Peripherie als echte Teilmenge enthält, ist notwendig und hinreichend

$$-2R < -2|A|R + B < 2|A|R + B \leqq 2R,$$

wobei das Gleichheitszeichen höchstens einmal gelten darf. Es werde Gleichheit auf der linken Seite angenommen, also $B = 2(|A| - 1)R$ gesetzt. Dann lautet die notwendige und hinreichende Bedingung

$$|A| < 1.$$

Den Werten $2|A|R - B = 2(2|A| - 1)R \leqq w \leqq 2R$ entsprechen Punkte z im Kreise $|z| \leqq R$, die der Gleichung $z = \frac{\bar{A}}{|A|}|z|$ genügen; der Schlitz ist also geradlinig, und zwar radial. — Die längs der Strecke $-2R$, $+2R$ aufgeschlitzte w-Ebene ist einerseits schlichtes Bild des Kreisinnern $|t| < R$, andererseits schlichtes Bild des längs einer radial verlaufenden Strecke aufgeschlitzten Kreises $|z| < R$, woraus sich ergibt, daß die Abbildung $z \to t$ von der gewünschten Art ist.

Der Endpunkt des Schlitzes im z-Kreise sei ζ. Aus ζ läßt sich A bestimmen gemäß den Gleichungen

$$\zeta = \frac{\bar{A}}{|A|}|\zeta|, \qquad |A|\left(|\zeta| + \frac{R^2}{|\zeta|}\right) + 2(|A| - 1)R = 2R,$$

$$|A| = \frac{4R|\zeta|}{(R + |\zeta|)^2}, \qquad A = \frac{4R\bar{\zeta}}{(R + |\zeta|)^2}.$$

Für $|\zeta| < R$ ist, wie verlangt, $|A| < 1$. Die explizite Darstellung von t ergibt folgendes:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{\sqrt{\zeta}}(|\zeta| z + R\zeta), \qquad V = \sqrt{(R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - z)} \\ t = \dfrac{R(U - V)^2}{(R + |\zeta|)^2 z} = \dfrac{R(R + |\zeta|)^2 z}{(U + V)^2} \\ \dfrac{dt}{dz} = \dfrac{R(R + |\zeta|)^2 (R\zeta - |\zeta| z)}{(U + V)^2 V \sqrt{\zeta}} \\ \dfrac{dt}{dz}_{z=0} = \dfrac{(R + |\zeta|)^2}{4R\zeta} \\ \dfrac{d^2t}{dz^2}_{z=0} = \dfrac{(R^2 - |\zeta|^2)^2}{4R^3\zeta^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Aus dem Ansatz (1), der zu der vorstehenden Abbildung führte, ist ersichtlich, daß die KOEBEschen Schrankenfunktionen

$$\frac{Ct}{(R+t)^2}$$

wieder in KOEBEsche Schrankenfunktionen übergehen; d.h., scharfe Ungleichungen, die die genannten Schrankenfunktionen besitzen, gehen wieder in scharfe Ungleichungen über. Bei der Abbildung entspricht dem Werte $z=\zeta$ der Wert $t=R$. Es gehen also nur solche Ungleichungen von $\varphi(t)$ in scharfe Ungleichungen über, bei denen Gleichheit für $N=\varphi(R)$ eintritt; gegebenenfalls ist noch eine Ersetzung von t durch εt, $|\varepsilon|=1$, erforderlich.

Zwecks Anwendung der obigen Abbildung möge die Ungleichung § 4, (10) spezialisiert werden in

$$\left|\frac{\varphi'(0)\,[\varphi(t)-N]}{[\varphi(t)-\varphi(0)]\,[N-\varphi(0)]}\right| \geqq \frac{(R-|t|)^2}{R^2|t|}.$$

Setzt man

$$\varphi(t)=F(z), \qquad N=\varphi(R),$$

so gilt

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geqq \frac{(R+|\zeta|)^2\,(R-|t|)^2}{4R^3|\zeta t|}.$$

Man erhält

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geqq \frac{1}{2R^2|\zeta z|}\left[\frac{1}{|\zeta|}\,|\,|\zeta|\,z+R\,\zeta|^2+|R^2-\bar{\zeta}z|\,|\zeta-z|-(R+|\zeta|)^2|z|\right]$$

und nach kurzer Rechnung den

Satz 7: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation*

$$\left|\frac{F'(0)\,[F(z)-F(\zeta)]}{[F(z)-F(0)]\,[F(\zeta)-F(0)]}\right| \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{|\zeta|}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{|z|}\right)(|z|-|\zeta|)-\frac{1}{2R^2}\,\frac{\zeta}{\zeta z}\,(|R^2-\bar{\zeta}z|-R\,|\zeta-z|)$$

und der durch Vertauschung von ζ und z aus ihr hervorgehenden. Diese Ungleichungen sind scharf. Sie besitzen KOEBEsche *Schrankenfunktionen.*

Dieses Resultat läßt sich durch eine lineare Transformation des Kreises in sich verallgemeinern; auch kann man einen analogen, aber weniger brauchbaren Satz aus § 4, (9) gewinnen.

Formt man die Ungleichung § 5, Satz 4

$$\left|\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}-\frac{2\varphi'(0)}{\varphi(0)-N}\right| \leqq \frac{4}{R}$$

vermittels der Abbildung (1) dieses Paragraphen um, wobei die Gleichungen

$$q(t)=F(z), \qquad t'q'(t)=F'(z),$$
$$t''q'(t)-t'^2q''(t)=F''(z), \qquad N=\varphi(R)$$

gelten, so erhält man

$$(3) \qquad \left| \frac{F''(0)}{F'(0)} + \frac{2F'(0)}{F(\zeta) - F(0)} - \frac{(R - |\zeta|)^2}{R^2 \zeta} \right| \leq \frac{(R + |\zeta|)^2}{R^2 |\zeta|} .$$

Durch eine lineare Abbildung des Kreises in sich verallgemeinert sich diese Ungleichung in

Satz 8: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left| \frac{F''(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{2F'(z_1)}{F(z_2) - F(z_1)} - \frac{2\bar{z}_1}{R^2 - |z_1|^2} - \frac{[|R^2 - z_1 \bar{z}_2| - R|z_2 - z_1|]^2}{(R^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)(R^2 - z_1 \bar{z}_2)} \right| \leq \frac{[|R^2 - z_1 \bar{z}_2| + R|z_2 - z_1|]^2}{(R^2 - |z_1|^2)|z_2 - z_1||R^2 - z_1 \bar{z}_2|} .$$

Die Ungleichung besitzt Koebesche *Schrankenfunktionen.*

Läßt man in dieser Relation z_2 zum Kreisrande rücken, so geht sie, falls der Randwert $F(z_2)$ existiert, über in

$$\left| \frac{F''(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{2F'(z_1)}{F(z_2) - F(z_1)} - \frac{2\bar{z}_1}{R^2 - |z_1|^2} \right| \leq \frac{4R}{R^2 - |z_1|^2} .$$

Dies ist nichts anderes als die Ungleichung § 5, Satz 4, in der der Randwert $F(z_2)$ an die Stelle von N getreten ist. Für Randwerte sind also die Sätze 4 und 8 miteinander identisch.

Weiter findet man noch durch Umformung der Ungleichung § 5, (6) ohne weitere Rechnung:

$$(4) \qquad \left| \lg \left[\left(\frac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{f(\zeta)}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(\zeta)}} \right)^2 \right] \right| \leq 4 \lg \left[\frac{R\zeta + |\zeta| z + \sqrt{\zeta (R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - \bar{z})} + (R + |\zeta|)\sqrt{|\zeta z|}}{R\zeta + |\zeta| z + \sqrt{\zeta (R^2 - \bar{\zeta} z)(\zeta - \bar{z})} - (R + |\zeta|)\sqrt{|\zeta z|}} \right] .$$

§ 7. Folgerungen aus den Ergebnissen von § 6.

Die zuletzt abgeleitete Relation vereinfacht sich wesentlich, wenn ζ und z auf einem Radius liegen. Dann geht sie über in

$$(1) \qquad \left| \lg \left[\left(\frac{\sqrt{f(z)} - \sqrt{f(\zeta)}}{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(\zeta)}} \right)^2 \right] \right| \leq 2 \lg \left[\frac{(R + \sqrt{|\zeta z|})(\sqrt{|\zeta|} + \sqrt{|z|})}{(R - \sqrt{|\zeta z|})(\sqrt{|\zeta|} - \sqrt{|z|})} \right] .$$

Satz 7 liefert für $\arc \zeta = \arc z$:

$$(2) \qquad \left| \frac{F(\zeta) - F(z)}{(F(z) - F(0))(F(\zeta) - F(0))} \right| \geq \frac{|\zeta - z||R^2 - \bar{\zeta} z|}{|F'(0)| R^2 |\zeta z|} .$$

Wegen der Regularität von $F(z)$ darf man aus (2) schließen

$$(3) \qquad \frac{|F'(z)|}{|F(z) - F(0)|^2} \geq \frac{R^2 - |z|^2}{|F'(0)| R^2 |z|^2} .$$

Durch eine lineare Transformation des Kreises in sich verallgemeinert sich diese Ungleichung in

$$\frac{|F'(z_1)\,F'(z_2)|}{|F(z_1)-F(z_2)|^2} \geq \frac{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)}{|z_1-z_2|^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2}, \tag{4}$$

eine Relation, die schärfer ist als die aus § 2, (7) hervorgehende Abschätzung der linken Seite nach unten.

Für *ungerade* Funktionen führt die letzte Ungleichung auf

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \geq \frac{R^2-|z|^2}{|z|\,(R^2+|z|^2)} \tag{5}$$

und in Verbindung mit der aus § 4, (15) leicht folgenden Abschätzung

$$|f(z)| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2|z|}{R^2+|z|^2} \tag{6}$$

weiterhin auf

$$|f'(z)| \geq \frac{|f'(0)|\,R^2(R^2-|z|^2)}{(R^2+|z|^2)^2}. \tag{7}$$

Die Formeln (2) und (3) schreiben sich am einfachsten für Funktionen $g(z)$. Für diese gilt

$$\left|\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}\right| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|\zeta z|}{R^2|\zeta z|}, \tag{8}$$

falls $\arc \zeta = \arc z$, und

$$|g'(z)| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|z|^2}{R^2|z|^2}. \tag{9}$$

Ein zu Formel (8) analoges Ergebnis wurde von G. M. GOLUSIN erzielt, nämlich

$$\left|\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}\right| \geq |b_{-1}|\,\frac{R^2-|z|^2}{R^2|z|^2}, \quad \text{falls} \quad |\zeta|=|z|,$$

veröffentlicht [Mat. Sbornik, II. ser. **19**, 183—202 (1946)]. — Läßt man in Ungleichung (3) z nach p konvergieren, so findet man

$$|P| \leq \frac{|F'(0)|\,R^2|p|^2}{R^2-|p|^2}. \tag{10}$$

Setzt man in Satz 7 $\lim z = p$, so ergibt sich eine p enthaltende Abschätzung für $|F(z)-F(0)|$ nach oben

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{|F(z)-F(0)|} \geq \frac{1}{2|F'(0)|}\left(1+\frac{R}{|z|}\right)\left(1-\frac{R}{|p|}\right)\frac{|p|-|z|}{R^2} + \\ + \frac{|z-p|\,[|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|]}{2|F'(0)|\,R^2|pz|}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

in der p und z vertauscht werden dürfen.

Die obige Ungleichung (4) läßt sich, angewandt auf $f(z)$, schreiben

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|^2 \leq \frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2}{(R^2-|z_1|^2)\,(R^2-|z_2|^2)}\,|f'(z_1)\,f'(z_2)|.$$

Vermöge der Relation § 4, (7) findet man hieraus

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leq \frac{|f'(0)|\,R^2\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|}{(R-|z_1|)^2\,(R^2-|z_2|)^2}, \tag{12}$$

Durch lineare Transformation beider Variablen geht diese Ungleichung über in

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{|F(z_1)-F(z_2)|}{|F(z_1)-N|\,|F(z_2)-N|} \\ \qquad \leqq \dfrac{|F'(z_3)|}{|F(z_3)-N|^2}\,\dfrac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R^2-|z_3|^2)^3}{[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}. \end{cases}$$

Das zu vermutende Gegenstück von (12)

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\Big| \geqq \frac{|f'(0)|\,R^2|\,R^2-\bar{z}_1 z_2|}{(R^2+|z_1|)^2\,(R^2+|z_2|)^2}$$

läßt sich aus (8) in Verbindung mit § 4, (15) nur unter der Voraussetzung $\arc z_2 = \arc z_1$ beweisen.

In diesem Zusammenhang ist eine Formel von Iliev [Über endliche Summen schlichter Funktionen, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., N. s. **70**, 9—11 (1950)] zu erwähnen:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqq \frac{1-r}{(1+r)^3}$$

für $f'(0)=1$, $R=1$, $|z_1|, |z_2| \leqq r<1$.

Falls die Vermutung richtig ist, folgt die Ungleichung von Iliev durch Vergröberung. Aus § 2, (13) und § 4, (16) kann man die Abschätzung

$$(14)\quad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqq \frac{|f'(0)|\,R^2(R-|z_1|)\,(R-|z_2|)}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)\,(R+|z_2|)}$$

gewinnen, die für $|z_2|=|z_1|$ schlechter, für $z_1=0$ besser ist als die Formel von Iliev.

Die Ungleichung (3) und Satz 8 des vorigen Paragraphen lassen sich durch eine leichte Abschwächung vereinfachen in

$$(15)\quad \left|\frac{a_1}{F(z)-a_0}+\frac{a_2}{a_1}\right| \leqq \frac{R^2+|z|^2}{R^2|z|}$$

und

$$(16)\quad \left|\frac{F''(z_1)}{F'(z_1)}+\frac{2F'(z_1)}{F(z_2)-F(z_1)}-\frac{2\bar{z}_1}{R^2-|z_1|^2}\right| \leqq 2\,\frac{|R^2-\bar{z}_1 z_2|^2+R^2|z_2-z_1|^2}{(R^2-|z_1|^2)\,|z_2-z_1|)\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|}.$$

Läßt man in Satz 8 z_2 nach p konvergieren, so erhält man

$$(17)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{F''(z)}{F'(z)}-\dfrac{2\bar{z}}{R^2-|z|^2}+\dfrac{[|R^2-\bar{p}z|-R|z-p|]^2}{(R^2-|z|^2)\,(z-p)\,(R^2-\bar{p}z)}\right| \\ \qquad \leqq \dfrac{[|R^2-\bar{p}z|+R|z-p|]^2}{(R^2-|z|^2)\,|z-p|\,|R^2-\bar{p}z|}. \end{cases}$$

Durch den Grenzübergang $|p|\to R$ gelangt man von hier wieder zur Ungleichung des Satzes 4, § 5 für $F(z)=f(z)$, $\lim N=\infty$ zurück.

Aus Ungleichung (15) gewinnt man den

Satz 9: *Befriedigen die Koeffizienten a_1 und a_2 der Potenzreihe einer allgemeinen schlichten Funktion die Ungleichung $|a_2| \geqq \frac{2|a_1|}{R}$, so liegt der Pol der Funktion bereits im Kreise*

$$|p| \leqq \left|\frac{a_2}{a_1}\right|\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2|a_1|}\sqrt{|a_2|^2R^2-4|a_1|^2} \leqq R.$$

Die Schranke wird erreicht bei der Funktion $\dfrac{Cz}{R^2 - \left(|p| + \dfrac{R^2}{|p|}\right) z + z^2}$.

Man erhält nämlich aus (15) für $\lim z = p$:

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \leqq \frac{R^2 + |p|^2}{R^2 |p|},$$

$$\left[|p| - \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \frac{R^2}{2}\right]^2 \geqq \frac{R^2}{4|a_1|^2} \left[|a_2|^2 R^2 - 4|a_1|^2\right],$$

woraus die oben angegebene Abschätzung hervorgeht. Die alternative untere Schranke für $|p|$ ist bedeutungslos, da $\geqq R$. — Der Satz 6, § 5, ist hiermit verschärft. — Setzt man in (17) $z = 0$, so wird die Abschätzung für p noch schärfer insofern, als auch der arcus mit erfaßt wird.

Die Relation § 6, (3) nimmt eine besonders einfache Gestalt durch Einführung einer Funktion $g(z)$ an. Wird $\dfrac{1}{F(z) - F(0)} = g(z)$ gesetzt, so lautet sie (nach einer elementaren Rechnung)

$$|g(z) - b_0 - b_{-1} \frac{(R - |z|)^2}{2R^2 z}| \leqq |b_{-1}| \frac{(R + |z|)^2}{2R^2 |z|}, \tag{18}$$

woraus durch Vergröberung

$$|g(z) - b_0| \leqq |b_{-1}| \frac{R^2 + |z|^2}{R^2 |z|} \tag{19}$$

folgt.

Aus der Ungleichung § 6, (3)

$$\left|\frac{2a_1}{F(z) - a_0} + \frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| \leqq \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|}$$

entnimmt man zwecks Abschätzung von $|F(z) - a_0|$ zunächst

$$\left|\frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| - \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} \leqq \frac{2a_1}{F(z) - a_0} \leqq \left|\frac{2a_2}{a_1} - \frac{(R - |z|)^2}{R^2 z}\right| + \frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|}.$$

Die linke Ungleichung führt nur dann zu einer Abschätzung nach oben für $|F(z) - a_0|$, wenn der links stehende Ausdruck nichtnegativ ist. Dieser erreicht auf einem Kreise $|z| = \text{Const.}$ sein Maximum für

$$\arc z = \arc\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \pi \quad \text{mit} \quad 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| - \frac{4}{R}.$$

Für die Möglichkeit einer Abschätzung ist somit notwendig:

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \geqq \frac{2}{R}.$$

Das Minimum besitzt den Wert

$$-\frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} + \left[\frac{(R - |z|)^2}{R^2 |z|} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right] = -\frac{4}{R} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|$$

oder

$$-\frac{(R + |z|)^2}{R^2 |z|} - \left[\frac{(R - |z|)^2}{R^2 |z|} - 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right] = 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right| - 2\frac{R^2 + |z|^2}{R^2 |z|},$$

je nachdem der Ausdruck in der eckigen Klammer nichtnegativ oder nichtpositiv ist; es ist dann und nur dann nichtnegativ, wenn

$$\frac{R^2+|z|^2}{R^2|z|} \leqq \frac{a_2}{a_1}.$$

Setzt man

$$\frac{R^2+\gamma^2}{R^2\gamma} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \gamma \leqq R,$$

so ist die Abschätzung auf der vollen Kreisperipherie mit dem Radius $|z|$ dann und nur dann möglich, wenn $R \geqq |z| \geqq \gamma$. Aus dem Beweise von Satz 9 folgt $\gamma \geqq |p|$. Somit gewinnt man den

Satz 10: *Für jede allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ gilt im Innern des Kreises $|z|<R$ die Relation*

$$|F(z)-a_0| \geqq \frac{2|a_1|R^2|z|}{\left|2\frac{a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|+(R+|z|)^2} \geqq \frac{|a_1|R^2|z|}{R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|+|z|^2}.$$

Falls die Koeffizienten a_1 und a_2 der Ungleichung $|a_2| \geqq \frac{2|a_1|}{R}$ genügen, ist außerdem in derjenigen Nähe von $\arg z = \arg\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\pi$, in der der Nenner positiv bleibt,

$$|F(z)-a_0| \leqq \frac{2|a_1|R^2|z|}{\left|2\frac{a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|-(R+|z|)^2}.$$

Im Kreisringe $R \geqq |z| \geqq \gamma \geqq |p|$, $\frac{R^2+\gamma^2}{R^2\gamma} = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|$, $\gamma \leqq R$, besteht diese Relation, die sich alsdann in

$$|F(z)-a_0| \leqq \frac{|a_1|R^2|z|}{-R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|-|z|^2}$$

abschwächen läßt, für alle $\arg z$. — Die erste Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion $\frac{Cz}{(R-\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, die dritte diejenige von Satz 9.

Aus diesem Satz erhält man für $\arg z = \arg\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\pi$ die von $|z|$ freie, aber unscharfe Abschätzung

$$|F(z)-a_0| \leqq \frac{|a_1|^2 R}{|a_2|R-2|a_1|}.$$

Die erste Ungleichung des Satzes ist in der abgeschwächten Form für $F(z)-f(z)$ bereits bekannt. Sie befindet sich bei Kössler (Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême **1932**, Nr. 5, S. 1—7). Durch Anwendung von § 5, (8) erhält man aus genannter Formel die Verzerrungsformel § 4, (15).

Aus der Formel (3) und Satz 10 dieses Paragraphen ergibt sich:

$$(20)\quad |F'(z)| \geqq \frac{4|a_1|R^2(R^2-|z|^2)}{\left[\left|\frac{2a_2}{a_1}R^2 z-(R-|z|)^2\right|+(R+|z|)^2\right]^2} \geqq \frac{|a_1|R^2(R^2-|z|^2)}{\left[R^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|R^2|z|+|z|^2\right]^2}.$$

Für die letzte Ungleichung gilt das bei Satz 10 Gesagte (Kössler).

Aus Satz 8 lassen sich zwei Ungleichungen, enthaltend $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ gewinnen. Zunächst erhält man für eine *ungerade Funktion* $f(z)$ $(z_2 = -z_1)$:

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2 - |z|^2} + \frac{(R - |z|)^4}{2z(R^4 - |z|^4)}\right| \leqq \frac{(R + |z|)^4}{2|z|(R^4 - |z|^4)}. \tag{21}$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die am Eingang von § 4 definierte ungerade Funktion $\varphi(t)$ an, für die zusätzlich zu den dort aufgeführten Gleichungen

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 2\sqrt{z}\,\frac{f''(z)}{f'(z)} - \sqrt{z}\,\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

gilt, so findet man

$$\left|\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} - \frac{2\bar{t}}{R^2 - |t|^2} + \frac{(\sqrt{R} - |t|)^4}{2t(R^2 - |t|^4)}\right| \leqq \frac{(\sqrt{R} + |t|)^4}{2|t|(R^2 - |t|^4)},$$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{2z} - \frac{|z|}{z(R - |z|)} + \frac{(\sqrt{R} - \sqrt{|z|})^4}{4z(R^2 - |z|^2)}\right| \leqq \frac{(\sqrt{R} + \sqrt{|z|})^4}{4|z|(R^2 - |z|^2)}. \tag{22}$$

Diese Relation läßt sich vergröbern in die immer noch scharfe Ungleichung (KOEBEsche Schrankenfunktion)

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{R - 3|z|}{2z(R - |z|)}\right| \leqq \frac{R^2 + 6R|z| + |z|^2}{2|z|(R^2 - |z|^2)}. \tag{23}$$

Ferner liefert Satz 8 für $F(z) = f(z)$, $z_2 = 0$:

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2f'(z)}{f(z)} + \frac{R^2 - 2R|z| - |z|^2}{z(R^2 - |z|^2)}\right| \leqq \frac{R + |z|}{|z|(R - |z|)}. \tag{24}$$

Auch diese Abschätzung ist scharf wie (23).

Die beiden letzten Formeln sowie der spezialisierte Satz 4, § 5,

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{R^2 - |z|^2}\right| \leqq \frac{4R}{R^2 - |z|^2}$$

enthalten dieselben Größen, besitzen die gleiche Schrankenfunktion, sind jedoch, wie eine elementare Rechnung zeigt, nicht auseinander ableitbar.

Die Ungleichungen (22) und (24) sollen nunmehr radial integriert werden. Zu diesem Zwecke werde zunächst in (22) substituiert

$$z = \varepsilon r^2, \quad |\varepsilon| = 1 \text{ (Const.)},$$

$$f(z) = h(r), \quad f'(z) = \frac{1}{2\varepsilon r}\,h'(r),$$

$$f''(z) = \frac{1}{4\varepsilon^2 r^2}\,h''(r) - \frac{1}{4\varepsilon^2 r^3}\,h'(r).$$

Dann schreibt sich (22)

$$\left|\frac{h''(r)}{2\varepsilon r h'(r)} - \frac{h'(r)}{2\varepsilon r h(r)} - \frac{1}{\varepsilon(R - r^2)} + \frac{(\sqrt{R} - r)^3}{4\varepsilon r^2(R + r^2)(\sqrt{R} + r)}\right| \leqq \frac{(\sqrt{R} + r)^3}{4r^2(R + r^2)(\sqrt{R} - r)},$$

$$\left|\frac{h''(r)}{h'(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r - \sqrt{R}} - \frac{1}{r + \sqrt{R}} + \frac{r}{R + r^2}\right| \leqq \frac{1}{2r} - \frac{2}{r - \sqrt{R}} + \frac{r}{R + r^2}.$$

Die Integration zwischen den Grenzen r_1 und r_2, $r_2 \geqq r_1$, liefert

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \lg \left[\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \sqrt[4]{\frac{|z_2|^3}{|z_1|^3}} \frac{(\sqrt{R} - \sqrt{|z_2|})}{(\sqrt{R} - \sqrt{|z_1|})} \frac{(R + |z_1|)}{(R + |z_2|)} \sqrt{\frac{R + |z_2|}{R + |z_1|}} \right] \right| \\ &\qquad \leqq \lg \left[\frac{\sqrt[4]{|z_2|}(\sqrt{R} - \sqrt{|z_1|})^2}{\sqrt[4]{|z_1|}(\sqrt{R} - \sqrt{|z_2|})^2} \sqrt{\frac{R + |z_2|}{R + |z_1|}} \right] \\ &\qquad \text{für} \quad \arg z_2 = \arg z_1, \quad |z_2| \geqq |z_1| . \end{aligned} \right.$$

Hieraus gewinnt man durch Vergröberung

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \frac{f'(z_1)}{f(z_1)} \right| \frac{|z_1|(R + |z_1|)}{R - |z_1|} \leqq \left| \frac{f'(z_2)}{f(z_2)} \right| \frac{|z_2|(R + |z_2|)}{R - |z_2|} \\ &\qquad \text{für} \quad \arg z_2 = \arg z_1, \quad |z_2| \geqq |z_1| . \end{aligned} \right.$$

Hierin ist die Abschätzung § 4, (11) enthalten; sie ergibt sich durch den Grenzübergang $z_1 \to 0$.

Setzt man in Ungleichung (24)

$$\left\{ \begin{aligned} &z = \varepsilon r, \qquad |\varepsilon| = 1 \ \text{(Const.)}, \\ &f(z) = h(r), \qquad f'(z) = \bar{\varepsilon} h'(r), \qquad f''(z) = \bar{\varepsilon}^2 h''(r), \end{aligned} \right.$$

so geht sie über in

$$\left| \frac{h''(r)}{h'(r)} - \frac{2h'(r)}{h(r)} + \frac{R^2 - 2Rr - r^2}{r(R^2 - r^2)} \right| \leqq \frac{R + r}{r(R - r)} ,$$

Die Integration liefert ($r_2 \geqq r_1$):

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \lg \left[\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \frac{f^2(z_1)}{f^2(z_2)} \frac{|z_2|}{|z_1|} \frac{(R + |z_1|)}{(R + |z_2|)} \frac{(R - |z_2|)}{(R - |z_1|)} \right] \right| \leqq \lg \left[\frac{|z_2|(R - |z_1|)^2}{|z_1|(R - |z_2|)^2} \right] \\ &\text{für} \quad \arg z_2 = \arg z_1, \qquad |z_2| \geqq |z_1| . \end{aligned} \right.$$

Durch Vergröberung und Übergang zu einer Funktion $g(z)$ erhält man hieraus

$$(28)\quad \frac{|g'(z_1)|\,|z_1|^2}{R^2 - |z_1|^2} \leqq \frac{|g'(z_2)|\,|z_2|^2}{R^2 - |z_2|^2} \quad \text{für} \quad \arg z_2 = \arg z_1, \quad |z_2| \geqq |z_1| .$$

Die Ungleichung (9) dieses Paragraphen ergibt sich aus vorstehendem Resultat durch $\lim z_1 = 0$. Die nochmalige radiale Integration (von 28) liefert

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &|g(z_1) - g(z_2)| \leq \frac{|g'(z_3)|\,|z_3|^2}{R^2 - |z_3|^2} \frac{R^2 - |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|} |z_1 - z_2| \\ &\text{für} \quad \arg z_1 = \arg z_2 = \arg z_3, \ |z_1| \leqq |z_2| \leqq |z_3| . \end{aligned} \right.$$

§ 8. Gegenseitige Beschränkung von Funktionswerten.

In diesem Paragraphen sollen aus den bisherigen Resultaten einige Formeln gefolgert werden, die nur Argumente und Funktionswerte, aber keine Nichtbildpunkte, Ableitungen und Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung enthalten. Es werden nur Funktionen $f(z)$ betrachtet. Sämtliche Formeln sind scharf; sie besitzen unter anderem die spezielle Schrankenfunktion $\frac{z}{(R + z)^2}$.

Jeder Formel werden die auf der reellen Achse liegenden Werte von z_k, $z_k = \sigma_k r_k$, $\sigma_k^2 = 1$, für die die angegebene KOEBEsche Schrankenfunktion Gleichheit herbeiführt, hier unter der Bezeichnung „Schrankenwerte", beigefügt.

Aus den Formeln § 7, (4)

$$\frac{|f'(z_1)\, f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geq \frac{(R^2 - |z_1|^2)\,(R^2 - |z_2|^2)}{|z_1 - z_2|^2\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2}$$

und § 4, (9)

$$|f'(z_1)| \leq |f(z_1) - f(z_3)|\, \frac{[|R^2 - \bar{z}_1 z_3| + R|z_1 - z_3|]^2}{|z_1 - z_3|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_3|\, (R^2 - |z_1|^2)}$$

findet man durch Elimination der Ableitungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{|f(z_1) - f(z_3)|\, |f(z_2) - f(z_4)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \\ \geq \dfrac{|z_1 - z_3|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_3|\, |z_2 - z_4|\, |R^2 - \bar{z}_2 z_4|\, (R^2 - |z_1|^2)^2\, (R^2 - |z_2|^2)^2}{|z_1 - z_2|^2\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2\, [|R^2 - \bar{z}_1 z_3| + R|z_1 - z_3|]^2\, [|R^2 - \bar{z}_2 z_4| + R|z_2 - z_4|]^2} \end{cases}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leqq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_4 r_4 \leqq 0$.

Für $z_4 = z_1$ liefert diese Formel:

$$(2)\qquad \left|\frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_2)}\right| \geq \frac{|z_1 - z_3|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_3|\, [|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R|z_1 - z_2|]^2}{|z_1 - z_2|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\, [|R^2 - \bar{z}_1 z_3| + R|z_1 - z_3|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \geqq 0$, $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leqq 0$.

Ebenso findet man aus (1) für $z_4 = z_3$:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{|f(z_1) - f(z_3)|\, |f(z_2) - f(z_3)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \\ \geq \dfrac{|z_1 - z_3|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_3|\, |z_2 - z_3|\, |R^2 - \bar{z}_2 z_3|\, [|R^2 - \bar{z}_1 z_3| - R|z_1 - z_3|]^2\, [|R^2 - \bar{z}_2 z_3| - R|z_2 - z_3|]^2}{|z_1 - z_2|^2\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2\, (R^2 - |z_3|^2)^4} \end{cases}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \leqq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leqq 0$.

Die Relationen § 7, (13)

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{f'(z_3)}\right| \leq \frac{|z_1 - z_2|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\, (R^2 - |z_3|^2)^3}{[|R^2 - \bar{z}_1 z_3| - R|z_1 - z_3|]^2\, [|R^2 - \bar{z}_2 z_3| - R|z_2 - z_3|]^2}$$

und § 4, (2)

$$\left|\frac{f'(z_3)}{f(z_3)}\right| \leq \frac{R + |z_3|}{|z_3|\, (R + |z_3|)}$$

führen auf

$$(4)\qquad \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_3)}\right| \leq \frac{|z_1 - z_2|\, |R^2 - \bar{z}_1 z_2|\, (R - |z_3|)^2\, (R + |z_3|)^4}{|z_3|\, [|R^2 - \bar{z}_1 z_3| - R|z_1 - z_3|]^2\, [|R^2 - \bar{z}_2 z_3| - R|z_2 - z_3|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$, $r_3 \leqq r_1, r_2$.

Wendet man dieses Ergebnis auf die Funktion

$$\varphi(t) = f(z) - f(z_4), \qquad t = R^2 \frac{z - z_4}{R^2 - \bar{z}_4 z},$$

an, so verallgemeinert es sich in

$$(5)\qquad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)-f(z_4)}\right| \leqq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R^2-|z_3|^2)^2\,[|R^2-\bar{z}_3 z_4|+R|z_3-z_4|]^2}{|z_3-z_4|\,|R^2-\bar{z}_3 z_4|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2\,[|R^2-\bar{z}_2 z_3|-R|z_2-z_3|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \leqq 0$, $\sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leqq 0$, $\sigma_3 r_3 - \sigma_4 r_4 \leqq 0$.

Umgekehrt spezialisiert sich die letzte Formel für $z_3 = 0$ nach Umbenennung von z_4 in z_3 in

$$(6)\qquad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)}\right| \leqq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_3|)^2}{|z_3|\,(R-|z_1|)^2\,(R-|z_2|)^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = +1$.

Setzt man in (5) $z_2 = 0$ und schreibt statt z_1 z_3, statt $z_3 z_1$ und statt z_4 z_2, so erhält man

$$(7)\qquad \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)}\right| \geqq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2}{|z_3|\,(R+|z_1|)^2\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $r_1 - \sigma_2 r_2 \leqq 0$, $r_1 - \sigma_3 r_3 \geqq 0$.

Aus (4) findet man für $z_3 = z_1$:

$$(8)\qquad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leqq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $r_2 \geqq r_1$.

Ungleichung (2) geht für $z_2 = 0$ und Umbenennung von z_3 in z_2 über in das Gegenstück von (8):

$$(9)\qquad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \geqq \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R-|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|+R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = +1$, $r_2 \geqq r_1$.

Durch Abschwächung von (8) gelangt man zu

$$(10)\qquad \left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leqq 1 + \frac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$, $r_2 \geqq r_1$.

Weiterhin ergibt sich aus (6) für $z_1 = 0$ und Umbenennung von z_3 in z_1

$$(11)\qquad \left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leqq \frac{|z_2|\,(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,(R-|z_2|)^2},$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$,

daraus durch Abschwächung

$$(12)\qquad \left|1-\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| \leqq \frac{(|z_1|+|z_2|)\,(R^2+|z_1 z_2|)}{|z_1|\,(R-|z_2|)^2},$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$,

und aus (1) für $z_3 = z_4 = 0$:

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|^2}{|f(z_1) f(z_2)|} \leq \frac{|z_1 - z_2|^2 |R^2 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 z_2| (R - |z_1|)^2 (R - |z_2|)^2}, \tag{13}$$

Schrankenwerte: $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$.

In § 4, (18) wurde die Ungleichung bewiesen

$$\left| \lg \left[\frac{(\varphi(t) - N^*)(\varphi(0) - N)}{(\varphi(t) - N)(\varphi(0) - N^*)} \right] \right| \leq 2 \lg \left(\frac{R + |t|}{R - |t|} \right).$$

Durch die Abbildung § 6, (1) ff. geht sie über in

$$\left| \lg \left[\frac{(F(z_2) - F(z_1))(F(0) - N)}{(F(z_2) - N)(F(0) - F(z_1))} \right] \right| \leq \lg \left[\frac{\frac{1}{|z_1|} |z_1| z_2 + R z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2| |z_1 - z_2| + (R + |z_1|)^2 |z_2|}{\frac{1}{|z_1|} |z_1| z_2 + R z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2| |z_1 - z_2| - (R + |z_1|)^2 |z_2|} \right], \tag{14}$$

für $F(z) = f(z)$ speziell in

$$\left| \lg \left| 1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right| \right| \leq \lg \left[\frac{\frac{1}{|z_1|} |z_1| z_2 + R z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2| |z_1 - z_2| + (R + |z_1|)^2 |z_2|}{\frac{1}{|z_1|} |z_1| z_2 + R z_1|^2 + |R^2 - \bar{z}_1 z_2| |z_1 - z_2| - (R + |z_1|)^2 |z_2|} \right]. \tag{15}$$

Schrankenwerte sind: $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$, und $\sigma_1 = \sigma_2 = +1$, $r_2 \leq r_1$.

Im ersten Falle tritt Gleichheit ein derart, daß $1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)}$ seine obere Grenze, im zweiten derart, daß es seine untere Grenze erreicht.

Beim Vergleich der hier aufgeführten Relationen ist folgendes festzustellen:

Der Quotient $\frac{f(z_2)}{f(z_1)}$ wird durch (10) und (11) abgeschätzt. Aus der Verschiedenheit der Schrankenwerte von (10) und (11) geht hervor, daß jede dieser Ungleichungen den Quotienten in einem anderen Teilbereiche von $|z_1| < R$, $|z_2| < R$ besser abschätzt. Analoges gilt für die den Ausdruck $\left| 1 - \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right|$ enthaltenden Ungleichungen (8), (12) und (15) bzw. (9) und (15). Von den die drei Funktionswerte $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ aufweisenden Formeln (2), (3), (4), (6) und (7) besitzen nur (4) und (6) eine im gleichen Sinne abgeschätzte linke Seite, aber voneinander verschiedene Schrankenwerte; sie ergänzen also einander.

Für drei Punkte, die auf einem zu $|z| = R$ senkrechten Kreise liegen, läßt sich aus § 4, (3) eine bessere Abschätzung als (2) gewinnen. Die erwähnte Formel lautet

$$\left| \lg \left[\frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_3)} \right] \right| \leq \lg \left[\frac{|t_2| (R - |t_3|)^2}{|t_3| (R - |t_2|)^2} \right],$$

falls $\varphi(t)$ eine im Kreisinnern schlichte und reguläre, im Nullpunkt verschwindende Funktion ist und $|t_2| \geq |t_3|$, $\arc t_2 = \arc t_3$ gilt. Durch Transformation des Kreises in sich erhält man

$$t = R^2 \frac{z - z_1}{R^2 - \bar{z}_1 z}, \qquad \varphi(t) = f(z) - f(z_1)$$

$$(16)\quad \begin{cases} \lg\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_1)-f(z_3)}\right| \leq \lg\left\{\dfrac{|z_1-z_2|\,|R^2-\bar{z}_1 z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_3|-R|z_1-z_3|]^2}{|z_1-z_3|\,|R^2-\bar{z}_1 z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1 z_2|-R|z_1-z_2|]^2}\right\}, \\ \text{falls} \quad \left|\dfrac{z_1-z_2}{R^2-\bar{z}_1 z_2}\right| \geq \left|\dfrac{z_1-z_3}{R^2-\bar{z}_1 z_3}\right|, \qquad \arc\left(\dfrac{z_1-z_2}{R^2-\bar{z}_1 z_2}\right) = \arc\left(\dfrac{z_1-z_3}{R^2-\bar{z}_1 z_3}\right). \end{cases}$$

Schrankenwerte dieser Relation sind diejenigen Zahlen, die gleichzeitig den Ungleichungen

$$\sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 \geq 0, \qquad \sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \geq 0$$

und den obigen Gültigkeitsbedingungen von (16) genügen. Nach kurzer Rechnung findet man

$$\sigma_1 r_1 - \sigma_3 r_3 \geq 0, \qquad \sigma_2 r_2 - \sigma_3 r_3 \leq 0.$$

Ungleichung (16) ist für ihre zulässigen Werte offensichtlich genauer als (2).

Aus Ungleichung (11) läßt sich eine Abschätzung für den Radius R gewinnen, falls eine sich noch herausstellende Voraussetzung erfüllt ist. Genannte Formel läßt sich schreiben

$$\frac{R + |z_1|}{R - |z_2|} \geq \sqrt{\left|\frac{z_1 f(z_2)}{z_2 f(z_1)}\right|},$$

$$(17)\qquad R\left[|z_1 f(z_2)| - |z_2 f(z_1)|\right] \leq |z_1 z_2|\left[|z_1 f(z_1)| + |z_2 f(z_2)|\right].$$

Sie liefert eine Abschätzung für R dann und nur dann, wenn

$$|z_1 f(z_2)| \geq |z_2 f(z_1)|.$$

Falls z. B.

$$f(z_1) = \frac{|z_1|}{(R' + |z_1|)^2}, \qquad f(z_2) = \frac{z_2}{(R' - |z_2|)^2}$$

ist, liefert die Ungleichung $R \leq R'$.

§ 9. Die Abschätzung des Schwarzschen Differentialausdruckes.

Aus der Grundformel § 2, (7) findet man durch den Grenzübergang $\lim z_2 = z_1$ nach kurzer Rechnung

$$(1)\qquad \left|2\frac{F'''(z)}{F'(z)} - 3\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2\right| \leq \frac{12R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}.$$

Dieses Resultat ist bereits bekannt; es ist veröffentlicht von Kraus in den Mitteilungen des mathematischen Seminars Gießen, Heft 21, 1932.

Nach dem im Anschluß an § 2, (7) Gesagten ist Ungleichung (1) invariant gegenüber beliebigen linearen Transformationen der abhängigen Veränderlichen und gegenüber solchen linearen Transformationen der unabhängigen

Veränderlichen, die den Kreis in sich überführen. Schrankenfunktionen sind die Funktionen gemäß § 2, (9) und (10) und deren linear gebrochene Funktionen, und zwar tritt nach § 2, (11) und (12) Gleichheit ein für Werte z, die auf dem Orthogonalkreis

$$|\alpha|^2|z|^2 + 2R(\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z) + |\alpha|^2 R^2 = 0$$

bzw. dem Radius

$$z = \bar{\beta}^2 \bar{z}$$

liegen.

Durch leichte Abschwächungen kann man aus (1) die Formeln

$$(2) \qquad \left|\frac{F'''(z)}{F'(z)}\right| \geq \frac{3}{2}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|^2 - \frac{6R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}$$

und

$$(3) \qquad \left|\frac{d}{dz}\left[\frac{F''(z)}{F'(z)}\right]\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|^2 - \frac{6R^2}{(R^2 - |z|^2)^2}$$

ableiten. Beide sind scharf. Die Herleitung der allgemeinen Schrankenfunktion bedingt einen großen Rechenaufwand. Es mögen daher folgende Angaben genügen:

$$f(z) = \frac{z}{(R - \varepsilon z)^2}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

führt in (2) für $z = \pm\bar{\varepsilon}|z|$ Gleichheit herbei, in (3) für $z = \bar{\varepsilon}|z|$ unbeschränkt, für $z = -\bar{\varepsilon}|z|$ nur unter der Beschränkung $|z| \leq \frac{R}{2+\sqrt{3}}$. Die Funktion

$$g(z) = z + \frac{\varepsilon^2 R^2}{z}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

bewirkt in (2) Gleichheit für $z = \pm\varepsilon|z|$ unbeschränkt, in (3) jedoch nur im Intervalle $|z| \leq \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Aus (1) findet man für $z = 0$

$$(4) \qquad \left|\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right| \leq \frac{1}{R^2}$$

sowie nach kurzer Rechnung

$$(5) \qquad \left|\frac{b_1}{b_{-1}}\right| \leq \frac{1}{R^2}.$$

Diese Formeln liefern eine Abschätzung nach oben für R.

§ 10. Abschätzungen für Nichtbildpunkte und die Funktionen $M(r)$ und $m(r)$.

Die Relation § 5, (7)

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{N - a_0}\right| \leq \frac{2}{R}$$

läßt sich zu einer Abschätzung für $N - a_0$ ausgestalten. Man findet, falls $|a_2|R > 2|a_1|$ ist,

$$(1) \qquad |(|a_2|^2 R^2 - 4|a_1|^2)(N - a_0) + R^2 a_1^2 \bar{a}_2| \leq 2R|a_1|^3,$$

d.h., der von Bildpunkten freie Teil der Ebene ist im Innern eines Kreises enthalten. Das Äußere dieses Kreises, dem insbesondere das Kreisinnere

$$|w - a_0| < \frac{|a_1|^2 R}{|a_2| R + 2|a_1|}$$

und das Kreisäußere

$$|w - a_0| > \frac{|a_1|^2 R}{|a_2| R - 2|a_1|}$$

angehören, wird von Bildpunkten bedeckt.

Ist dagegen $|a_2| R < 2|a_1|$, so gilt

$$|(4|a_1|^2 - |a_2|^2 R^2)(N - a_0) - R^2 a_1^2 \bar{a}_2| \geq 2R|a_1|^3, \tag{2}$$

d.h., die Nichtbildpunkte liegen außerhalb eines Kreises, und die Funktion nimmt alle Punkte desselben und erst recht des Kreises

$$|w - a_0| \leq \frac{|a_1|^2 R}{|a_2| R + 2|a_1|}$$

an. Im Grenzfalle $|a_2| R = 2|a_1|$ sind die Nichtbildpunkte auf die Halbebene beschränkt:

$$\bar{a}_1^2 a_2 (N - a_0) + a_1^2 \bar{a}_2 (\bar{N} - \bar{a}_0) + |a_1|^4 \leq 0.$$

Diese Ergebnisse sind größtenteils bereits enthalten in einer Arbeit von Werner Fenchel (Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Berlin, physik.-math. Kl. **1931**, H. 22/23, 431—436).

Aus den Formeln § 4, (9) und (10) findet man für $F(z) = f(z)$, z bzw. $z_0 = 0$

$$\frac{(R - |z|)^2}{|f'(0)| R^2 |z|} \leq \left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{N} \right| \leq \frac{(R + |z|)^2}{|f'(0)| R^2 |z|}, \tag{3}$$

eine Verallgemeinerung der bekannten Verzerrungsformeln. Diese Ungleichung besitzt die Schrankenfunktion

$$f(z) = \frac{R^2 z}{(\varepsilon R - z)(\bar{\varepsilon} R - z)}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

mit $N = \frac{R}{2 - \varepsilon - \bar{\varepsilon}}$; Gleichheit ergibt sich links für $z = |z|$, rechts für $z = -|z|$. Durch Multiplikation mit der Ungleichung

$$|N| \geq \frac{|f'(0)| R}{4}$$

[aus § 4, (15)], und den Verzerrungsformeln § 4, (5) und (15) geht (3) über in

$$\left| \frac{N}{f(z)} - 1 \right| \geq \frac{(R - |z|)^2}{4R|z|}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{R - |z|}{R + |z|} \right)^2 \leq \left| 1 - \frac{f(z)}{N} \right| \leq \left(\frac{R + |z|}{R - |z|} \right)^2, \tag{5}$$

$$|N - f(z)| \geq \frac{|f'(0)| R (R - |z|)^2}{4(R + |z|)^2}. \tag{6}$$

Setzt man in (3) $\arc N_1 = \arc\big(f(z)\big)$, so erhält man eine Abschätzung für diejenigen Nichtbildpunkte, die auf der Verbindungsgeraden $0 - f(z)$ liegen:

$$|N_1| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 |z|\, |f(z)|}{|f'(0)|\, R^2 |z| - (R - |z|)^2 |f(z)|}. \tag{7}$$

Entsprechend gilt für $\arc N_2 = \arc\big(f(z)\big) + \pi$, d.h. für die auf der rückwärtigen Verlängerung dieser Geraden liegenden Nichtbildpunkte

$$|N_2| \geq \frac{|f'(0)|\, R^2 |z|\, |f(z)|}{(R + |z|)^2 |f(z)| - |f'(0)|\, R^2 |z|}. \tag{8}$$

Unter $M(r)$ und $m(r)$ werden, wie üblich, das Maximum und Minimum des absoluten Betrages einer Funktion auf dem Kreise $|z| = r$ verstanden.

Um untere Schranken für das Maximum $M(r)$ einer Funktion $f(z)$ zu bestimmen, werde von einer im Einheitskreise schlichten und regulären Funktion

$$W = \varphi(w) = C_1 w + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \cdots$$

ausgegangen. Wenn

$$w = \frac{f(z)}{M(r)}, \qquad |z| \leq r < R$$

gesetzt wird, ist

$$W = \varphi\left(\frac{f(z)}{M(r)}\right) = \psi(z)$$

eine im genannten Kreise schlichte und reguläre Funktion von z. Ihre Potenzreihenentwicklung beginnt

$$\psi(z) = \frac{C_1 c_1}{M(r)} z + \left[\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right] z^2 + \left[\frac{C_1 c_3}{M(r)} + \frac{2 C_2 c_1 c_2}{M^2(r)} + \frac{C_3 c_1^3}{M^3(r)}\right] z^3 + \cdots.$$

Aus § 5, (8) und § 9, (4) folgt einerseits

$$|C_2| \leq 2|C_1|, \qquad |C_1 C_3 - C_2^2| \leq |C_1|^2,$$

andererseits

$$\left|\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right| \leq \frac{2}{r} \frac{|C_2 c_1|}{M(r)},$$

$$\left|\frac{C_1 c_1}{M(r)}\left[\frac{C_1 c_3}{M(r)} + \frac{2 C_2 c_1 c_2}{M^2(r)} + \frac{C_3 c_1^3}{M^3(r)}\right] - \left[\frac{C_1 c_2}{M(r)} + \frac{C_2 c_1^2}{M^2(r)}\right]^2\right| \leq \frac{|C_1 c_1|^2}{r^2 M^2(r)}.$$

Vereinfacht schreibt sich das zweite Ungleichungssystem

$$\left|c_2 r M(r) + \frac{C_2}{C_1} c_1^2 r\right| \leq 2|c_1| M(r),$$

$$(c_1 c_3 - c_2^2) r^2 M^2(r) + \frac{C_1 C_3 - C_2^2}{C_1^2} c_1^4 r^2 \leq |c_1|^2 M^2(r).$$

Die schärfsten, vermöge der beiden ersten Ungleichungen richtigen Abschätzungen sind nunmehr

$$M(r) \geq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1| - |c_2| r}, \tag{9}$$

$$M^2(r) \geq \frac{|c_1|^4 r^2}{|c_1|^2 - |c_1 c_3 - c_2^2| r^2}. \tag{10}$$

Aus beiden Relationen folgt durch Abschwächung

$$M(r) \geq |c_1 r|. \tag{11}$$

Alle drei Formeln besitzen die Schrankenfunktion $c_1 z$.

Obere Schranken für $m(r)$ lassen sich unter Benutzung der Umkehrungsfunktion gewinnen. Es werde die Funktion

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

im Kreise $|z| \leq r < R$ betrachtet. Sie besitzt im Kreise $|w| \leq m(r)$ eine schlichte und reguläre Umkehrungsfunktion $z = q(w)$, die in genanntem Kreise absolut kleiner oder gleich r ist. Folglich ist auch

$$\zeta = \psi(w) = \frac{z}{(r + \varepsilon z)^2} = C_1 w + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \cdots, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

eine für $|w| < m(r)$ schlichte und reguläre Funktion von w. Ihre drei ersten Koeffizienten drücken sich nach kurzer Rechnung wie folgt aus:

$$C_1 = \frac{1}{c_1 r^2}, \qquad C_2 = -\frac{1}{c_1^3 r^3}(c_2 r + 2\varepsilon c_1),$$

$$C_3 = \frac{1}{c_1^5 r^4}(-c_1 c_3 r^2 + 2c_2^2 r^2 + 4\varepsilon c_1 c_2 r + 3\varepsilon^2 c_1^2).$$

Aus den Ungleichungen § 5, (17) und § 10, (5) entnimmt man

$$m(r) \leq \frac{2|C_1|}{|C_2|}, \qquad m^2(r) \leq \frac{|C_1|^2}{|C_1 C_3 - C_2^2|};$$

$$m(r) \leq \frac{2|c_1|^2 r}{|c_2 r + 2\varepsilon c_1|}, \qquad m^2(r) \leq \frac{|c_1|^4 r^2}{|(c_1 c_3 - c_2^2) r^2 + \varepsilon^2 c_1^2|}.$$

Hieraus gewinnt man die schärfsten Abschätzungen

$$m(r) \leq \frac{2|c_1|^2 r}{2|c_1| + |c_2| r}, \tag{12}$$

$$m^2(r) \leq \frac{|c_1|^4 r^2}{|c_1|^2 + |c_1 c_3 - c_2^2| r^2}, \tag{13}$$

die ebenso wie die Abschwächung

$$m(r) \leq |c_1| r \tag{14}$$

den Abschätzungen von $M(r)$ nach unten vollkommen analog gebaut sind. Alle drei Formeln besitzen die Schrankenfunktion $c_1 z$.

Faßt man die Ungleichungen (9) bis (14) zusammen und fügt die Relationen § 4, (15), § 7, Satz 10 und § 4, (5) hinzu, so erhält man die übersichtliche Reihe von

Satz 11: *Für die einer schlichten Funktion $f(z)$ zugeordneten Funktionen $M(r)$ und $m(r)$ gelten im Innern des Kreises $|z|<R$ die Relationen:*

$$\frac{|c_1|R^2r}{(R+r)^2},\ \frac{|c_1|^2r}{2|c_1|+|c_2|r}\leq\frac{|c_1|^2R^2r}{|c_1|R^2+|c_2|R^2r+|c_1|r^2}\leq m(r)\leq\frac{2|c_1|^2r}{2|c_1|+|c_2|r},$$

$$\frac{|c_1|^2r}{\sqrt{|c_1|^2+|c_1c_3-c_2^2|r^2}}\leq|c_1|r\leq\frac{2|c_1|^2r}{2|c_1|-|c_2|r},$$

$$\frac{|c_1|^2r}{\sqrt{|c_1|^2-|c_1c_3-c_2^2|r^2}}\leq M(r)\leq\frac{|c_1|R^2r}{(R-r)^2}.$$

Hiervon ist die zweite Ungleichung nicht scharf, die erste, dritte und letzte besitzen die KOEBEsche *Schrankenfunktion* $\frac{c_1R^2z}{(R+\varepsilon z)^2}$, $|\varepsilon|=1$, *alle übrigen* c_1z.

Insbesondere geht aus der Ungleichung $m(R)\leq|c_1|R$ hervor, daß es auf jedem Kreise um den Nullpunkt der Bildebene, dessen Radius $\geq|c_1|R$ ist, Nichtbildpunkte gibt.

Für schlichte Funktionen mit Pol liefern die Relationen § 4, (21) und (22) Abschätzungen der Nichtbildpunkte, wenn man $z=0$ setzt:

$$(15)\qquad \frac{|F'(0)|R^2|p|}{(R+|p|)^2}\leq|N-F(0)|\leq\frac{|F'(0)|R^2|p|}{(R-|p|)^2}$$

$$(16)\qquad \frac{|P|(R-|p|)}{|p|(R+|p|)}\leq|N-F(0)|\leq\frac{|P|(R+|p|)}{|p|(R-|p|)}.$$

Etwas genauer werden die rechten Schranken, wenn man von § 4, Satz 3 ausgeht. — Das Ergebnis (15) wurde bereits von BIEBERBACH gefunden und veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, physik.-math. Klasse, 1937, S. 359.

Die in § 8 abgeleiteten Relationen zwischen verschiedenen Funktionswerten können als Grundlage für die Abschätzung von Nichtbildpunkten dienen. Setzt man $\frac{Nf(z)}{N-f(z)}$ an die Stelle von $f(z)$, so erhält man z.B. aus § 8, (9):

$$(17)\qquad \left|\frac{N}{N-f(z_2)}\right|\geq\frac{|z_1-z_2||R^2-\bar{z}_1z_2|(R-|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1z_2|+R|z_1-z_2|]^2}\left|\frac{f(z_1)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|$$

aus § 8, (8):

$$(18)\qquad \left|\frac{N}{N-f(z_2)}\right|\leq\frac{|z_1-z_2||R^2-\bar{z}_1z_2|(R+|z_1|)^2}{|z_1|\,[|R^2-\bar{z}_1z_2|-R|z_1-z_2|]^2}\left|\frac{f(z_1)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|$$

aus § 8, (2):

$$(19)\qquad \left|\frac{N-f(z_2)}{N-f(z_3)}\right|\geq\frac{|z_1-z_3||R^2-\bar{z}_1z_3|\,[|R^2-\bar{z}_1z_2|-R|z_1-z_2|]^2}{|z_1-z_2||R^2-\bar{z}_1z_2|\,[|R^2-\bar{z}_1z_3|+R|z_1-z_3|]^2}\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_1)-f(z_3)}\right|.$$

Diesen Ungleichungen ist noch eine weitere hinzuzufügen, die aus § 4, (18) für $F(z)=f(z)$, $\lim N_2=\infty$ durch Abschwächung entsteht:

$$(20)\qquad \left[\frac{|R^2-\bar{z}_1z_2|-R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1z_2|+R|z_1-z_2|}\right]^2\leq\left|\frac{N-f(z_1)}{N-f(z_2)}\right|\leq\left[\frac{|R^2-\bar{z}_1z_2|+R|z_1-z_2|}{|R^2-\bar{z}_1z_2|-R|z_1-z_2|}\right]^2.$$

Die Formeln (17) bis (20) lassen sich zusammenfassend in der Gestalt

$$\left|\frac{N-A}{N-B}\right| \leq C, \qquad C \geq 1$$

schreiben; die Bedingung für C ergibt sich daraus, daß die Ungleichung für $\lim N = \infty$ richtig ist. Nach Durchführung einiger Rechnungen findet man für N die Beschränkung

$$|(C^2-1)N + (A - BC^2)| \geq C|A-B|.$$

Dementsprechend kann man für jede der Ungleichungen (17) bis (20) einen Kreis angeben derart, daß Nichtbildpunkte nur in seinem Äußeren anzutreffen sind, während sein Inneres von Bildpunkten überdeckt ist. Die hier nicht behandelten Ergebnisse von § 8 führen teilweise zu komplizierteren Abschätzungen.

Eine erste, zwei Nichtbildpunkte enthaltende Relation wurde bereits in § 4, (17) gefunden:

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)-N_1} - \frac{F'(z)}{F(z)-N_2}\right| \leq \frac{4R}{R^2-|z|^2}.$$

Für $F(z) = f(z)$, $z = 0$ folgt hieraus

$$\left|\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right| \leq \frac{4}{|f'(0)|R}, \tag{21}$$

woraus nach Szegö (s. Bieberbach, Funktionentheorie II, S. 75) zu schließen ist, daß von zwei diametral gegenüberliegenden Randpunkten mindestens einer eine Entfernung größer oder gleich $\frac{|f'(0)|R}{2}$ vom Nullpunkte besitzt.

Für eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ läßt sich ein ähnlicher Schluß ziehen, wenn es Nichtbildpunkte gibt, die zu $F(0)$ diametral liegen. Gibt es Nichtbildpunkte derart, daß ihre Verbindungslinien mit $F(0)$ senkrecht aufeinanderstehen, so ist nach § 4, (17)

$$\frac{1}{|N_1 - F(0)|^2} + \frac{1}{|N_2 - F(0)|^2} \leq \frac{16}{|F'(0)|^2 R^2}, \tag{22}$$

und für mindestens einen Index gilt:

$$|N_{\frac{1}{2}} - F(0)| \geq \frac{|F'(0)|R}{2\sqrt{2}}.$$

Schrankenfunktion für die beiden letzten Ungleichungen ist

$$\frac{z}{R^2 + 2iRz + z^2},$$

wenn $N_1 = F(R)$, $N_2 = F(-R)$ gewählt werden.

Ferner folgt aus § 4, (17) für $\lim z = p$

$$|N_1 - N_2| \leq \frac{4|P|R}{R^2 - |p|^2} \tag{23}$$

und daraus für $\lim \mathfrak{p}=0$, d.h. für $g(z)$

$$|N_1 - N_2| \leqq \frac{4\,|b_{-1}|}{R}. \tag{24}$$

In Formel (23) gilt das Gleichheitszeichen für die Funktion

$$\frac{z}{R^2 - \left(|\mathfrak{p}| + \frac{R^2}{|\mathfrak{p}|}\right) z + \overline{z^2}}$$

und die Werte $N_1 = F(R)$, $N_2 = F(-R)$; (24) besitzt die Schrankenfunktion

$$\frac{b_{-1}}{z} + b_0 + \varepsilon \frac{b_{-1} z}{R^2}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Als Ungleichungen, die zwei Nichtbildpunkte enthalten, sind noch die früheren § 4, (18) und (19)

$$\lg\left[\frac{(F(z_2) - N_1)\,(F(z_1) - N_2)}{(F(z_1) - N_1)\,(F(z_2) - N_2)}\right] \leqq 2 \lg\left[\frac{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| + R|z_1 - z_2|}{|R^2 - \bar{z}_1 z_2| - R|z_1 - z_2|}\right],$$

$$\lg\left[\frac{F(z) - N_1}{F(z) - N_2}\right] \leqq 2 \lg\left[\frac{|R^2 - \bar{\mathfrak{p}} z| + R|z - \mathfrak{p}|}{|R^2 - \bar{\mathfrak{p}} z| - R|z - \mathfrak{p}|}\right],$$

und ihre Spezialisierung

$$\left|\lg\left[\frac{N_1 - F(0)}{N_2 - F(0)}\right]\right| \leqq 2 \lg\left[\frac{R + |\mathfrak{p}|}{R - |\mathfrak{p}|}\right] \tag{25}$$

zu erwähnen.

Setzt man in Formel § 4, (17) $z=0$ und beschränkt sich auf *Funktionen, für die* $a_0 = 0$ *ist*, so erhält man

$$\left|\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right| \leqq \frac{4}{|a_1|\,R},$$

$$\left|\frac{1}{|N_1|} - \frac{1}{|N_2|}\right| \leqq \frac{4}{|a_1|\,R},$$

$$\frac{1}{m(R)} - \frac{1}{M(R)} \leqq \frac{4}{|a_1|\,R}. \tag{26}$$

Aus Ungleichung (23) folgt allgemein

$$|N_1| - |N_2| \leqq \frac{4\,|P|\,R}{R^2 - |\mathfrak{p}|^2},$$

$$M(R) - m(R) \leqq \frac{4\,|P|\,R}{R^2 - |\mathfrak{p}|^2}. \tag{27}$$

Beschränkt man sich auf *Funktionen mit* $a_0 = 0$, so liefert Formel (25):

$$\frac{M(R)}{m(R)} \leqq \left(\frac{R + |\mathfrak{p}|}{R - |\mathfrak{p}|}\right)^2. \tag{28}$$

Die Ergebnisse (26) bis (28) sind, wie man leicht verifiziert, scharf.

Für die Schwankung einer Funktion $f(z)$ auf einem Kreise $|z| = r$ findet man aus Satz 11 folgende scharfen Relationen:

$$(29)\qquad \frac{2|c_1|+|c_2|r}{2|c_1|-|c_2|r}, \qquad \sqrt{\frac{|c_1|^2+|c_1c_3-c_2^2|r^2}{|c_1|^2-|c_1c_3-c_2^2|r^2}} \leq \frac{M(r)}{m(r)} \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2,$$

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{4|c_1|^2|c_2|r^2}{4|c_1|^2-|c_2|^2r^2} \leq M(r)-m(r) \leq \dfrac{|c_1|R^3r^2(2|c_1|+|c_2|R)}{(R-r)^2[|c_1|R^2+|c_2|R^2r+|c_1|r^2]} \\ \qquad\qquad \leq \dfrac{4|c_1|R^3r^2}{(R^2-r^2)^2}, \end{cases}$$

$$(31)\qquad \frac{2|c_1|^4|c_1c_3-c_2^2|r^4}{|c_1|^4-|c_1c_3-c_2^2|^2r^4} \leq M^2(r)-m^2(r) \leq \frac{8|c_1|^2R^5(R^2+r^2)r^3}{(R^2-r^2)^4},$$

$$(32)\qquad \frac{|c_2|}{|c_1|^2} \leq \frac{1}{m(r)}-\frac{1}{M(r)} \leq \frac{2|c_1|+|c_2|R}{|c_1|^2R} \leq \frac{4}{|c_1|R},$$

$$(33)\qquad 2\frac{|c_1c_3-c_2^2|}{|c_1|^4} \leq \frac{1}{m^2(r)}-\frac{1}{M^2(r)} \leq 8\frac{R^2+r^2}{|c_1|^2R^3r}.$$

Die Ungleichung § 7, (12) läßt sich in der Form

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leq \frac{|c_1|R^2(|z_2|-|z_1|)(R^2-|z_1z_2|)}{(R-|z_1|)^2(R-|z_2|)^2}$$

schreiben, worin $\arc z_2 = \arc z_1$, $|z_2| \geq |z_1|$ ist. Wählt man z_2 derart, daß $|f(z_2)| = M(r_2)$, $(r_1 = |z_1|,\ r_2 = |z_2|)$, so ist die linke Seite mindestens gleich $M(r_2)-M(r_1)$.

Mithin ergibt sich

$$(34)\qquad M(r_2)-M(r_1) \leq \frac{|c_1|R^2(r_2-r_1)(R^2-r_1r_2)}{(R-r_1)^2(R-r_2)^2} \quad \text{für} \quad r_2 \geq r_1.$$

Gleichheit tritt für die Koebesche Schrankenfunktion ein. Eine analoge Formel für $m(r_2)-m(r_1)$ ist dagegen nicht scharf.

Durch ähnliche Vergröberungen wie die soeben angewandte leitet man aus (3) ab:

$$(35)\qquad \frac{1}{M(r)}-\frac{1}{M(R)} \geq \frac{(R-r)^2}{|c_1|R^2r},$$

$$(36)\qquad \frac{1}{m(r)}-\frac{1}{m(R)} \geq \frac{(R-r)^2}{|c_1|R^2r},$$

aus (4):

$$(37)\qquad \frac{m(r)}{m(R)} \leq \frac{4Rr}{(R+r)^2},$$

und aus (6):

$$(38)\qquad m(R)-m(r) \geq \frac{|c_1|R(R-r)^2}{4(R+r)^2}.$$

Alle diese Formeln besitzen die Koebesche Schrankenfunktion.

§ 11. Übertragung von Ungleichungen für ungerade auf allgemeine schlichte Funktionen.

Bekanntlich wird jeder schlichten und regulären Funktion $f(z)$ durch die Gleichungen

$$\varphi^n(t) = f(z), \qquad t^n = z, \qquad n \text{ natürliche Zahl},$$

eine bis auf eine Einheitswurzel bestimmte, im Kreise $|t| < R^{1/n}$ schlichte und reguläre Funktion $\varphi(t)$ zugeordnet, deren Potenzreihe nur die Potenzen $t, t^{n+1}, t^{2n+1}, \ldots$ enthält. $\varphi(t)$ kann in die bisherigen Formeln eingeführt werden, und es lassen sich dadurch neue Ungleichungen für $f(z)$ gewinnen. Diese brauchen allerdings nicht immer scharf zu sein.

Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß bei Ungleichungen, die nur Schrankenfunktionen der am Ende von § 2 abgeleiteten Art

$$\varphi(t) = C \frac{2R^{1/n} t + (\beta + \gamma) t^2}{(R^{1/n} + \beta t)^2 + \lambda [2R^{1/n} t + (\beta + \gamma) t^2]}$$

$-|\beta| = |\gamma| = 1, \gamma \neq \beta$, C beliebig, λ derart, daß der Nenner $\neq 0$ für $|t| < R^{1/n}$ — besitzen, falls die Trivialität $n = 1$ ausgeschlossen wird, $n = 2$, $\lambda = \gamma = -\beta$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer Schrankenfunktion für $f(z)$ ist.

Unter den angegebenen Voraussetzungen hat die $\varphi(t)$ zugeordnete Funktion $f(z)$ den Ausdruck

$$f(z) = C^n z \left\{ \frac{2R^{1/n} + (\beta + \gamma) z^{1/n}}{(R^{1/n} + \beta z^{1/n})^2 + \lambda [2R^{1/n} z^{1/n} + (\beta + \gamma) z^{2/n}]} \right\}^n.$$

Wegen der Teilerfremdheit von Zähler und Nenner ist für ihre Eindeutigkeit zunächst notwendig

$$\beta + \gamma = 0,$$

so daß sie sich reduziert auf

$$f(z) = \frac{2^n C^n R z}{[R^{2/n} + 2(\beta + \lambda) R^{1/n} z^{1/n} + \beta^2 z^{2/n}]^n};$$

für die Eindeutigkeit ist weiterhin notwendig

$$\beta + \lambda = 0, \qquad n = 2,$$

so daß die KOEBEsche Funktion

$$f(z) = \frac{4C^2 R z}{(R + \beta^2 z)^2}, \qquad |\beta| = 1,$$

hervorgeht, die in der Tat regulär und schlicht ist und für gewisse Wertsysteme die Ungleichung in eine Gleichung überführt.

Mit Ausnahme der Relation § 2, (7) ist für keine Ungleichung bewiesen, daß sie keine Schrankenfunktion außer der verallgemeinerten KOEBEschen besitzt. Umgekehrt ist jedoch, bis auf wenige hier ausscheidende Ausnahmen, keine andere bekannt. Es soll daher im folgenden nur von einer Umformung von Ungleichungen vermöge ungerader Funktionen gemäß den Gleichungen

$$\varphi^2(t) = f(z), t^2 = z$$

Gebrauch gemacht werden. Eine Umformung in scharfe Ungleichungen ist nicht nur für Relationen möglich, die speziell für ungerade Funktionen hergeleitet sind, sondern auch für solche, unter deren Schrankenfunktionen auch ungerade auftreten. Dies ist insbesondere der Fall bei Relationen, die beliebige lineare Transformationen der abhängigen Variablen zulassen.

Zwischen den arcus der Wurzeln zweier Argumentwerte z_1 und z_2 und ihrer Funktionswerte $f(z_1)$ und $f(z_2)$ besteht ein Zusammenhang insofern, als $\sqrt{\frac{f(z)}{z}}$ im Kreise eindeutig ist. Dagegen ist jede Zahl $\sqrt{N}$ zweideutig, da die ungerade Funktion $\varphi(t)$ mit $\sqrt{N}$ auch $-\sqrt{N}$ vermeidet.

Zunächst formt sich die grundlegende Formel § 2, (7)

$$\left|\frac{\varphi'(t_1)\,\varphi'(t_2)}{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^2}-\frac{1}{(t_1-t_2)^2}\right|\leq\frac{R}{(R-|t_1|^2\,(R-|t_2|^2}$$

um in

$$(1)\quad \left|\frac{f'(z_1)\,f'(z_2)}{\sqrt{f(z_1)\,f(z_2)}\left[\sqrt{f(z_1)}-\sqrt{f(z_2)}\right]^2}-\frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}\left(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}\right)^2}\right|\leq\frac{R}{\sqrt{|z_1 z_2|}\,(R-|z_1|)\,(R-|z_2|)}.$$

Dieses Resultat läßt sich, ebenso wie der größte Teil der folgenden, durch die bekannten linearen Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen verallgemeinern.

Die Relation § 10, (3)

$$\frac{(\sqrt{R}-|t|)^2}{|\varphi'(0)|\,R|t|}\leq\left|\frac{1}{\varphi(t)}\pm\frac{1}{\sqrt{N}}\right|\leq\frac{(\sqrt{R}+|t|)^2}{|\varphi'(0)|\,R|t|}$$

führt auf

$$(2)\quad \frac{(\sqrt{R}-\sqrt{|z|})^2}{\sqrt{|f'(0)|}\,R\sqrt{|z|}}\leq\left|\frac{1}{\sqrt{f(z)}}\pm\frac{1}{\sqrt{N}}\right|\leq\frac{(\sqrt{R}+\sqrt{|z|})^2}{\sqrt{|f'(0)|}\,R\sqrt{|z|}}.$$

Ebenso geht die Ungleichung § 4, (18) über in

$$(3)\quad \left\{\lg\left[\frac{(|\sqrt{f(z_2)}+\sigma_1|\sqrt{N_1})\,(|\sqrt{f(z_1)}+\sigma_2|\sqrt{N_2})}{(|\sqrt{f(z_1)}+\sigma_1|\sqrt{N_1})\,(|\sqrt{f(z_2)}+\sigma_2|\sqrt{N_2})}\right]\leq 2\lg\left[\frac{R-|\sqrt{\bar{z}_1 z_2}+|R\,|\sqrt{\bar{z}_1}-\sqrt{z_2}|}{R-|\sqrt{\bar{z}_1 z_2}-|R\,|\sqrt{\bar{z}_1}-\sqrt{z_2}|}\right]\right.$$
$$\sigma_1=\pm 1,\qquad \sigma_2=\pm 1.$$

Die Umrechnung der Formel § 9, (1)

$$2\,\frac{\varphi'''(t)}{\varphi'(t)}-3\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\leq\frac{12R}{(R-|t|^2)^2}$$

liefert

$$(4)\quad \left|8\,\frac{f'''(z)}{f'(z)}-12\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2+3\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2-\frac{3}{z^2}\right|\leq\frac{12R}{|z|\,(R-|z|)^2}.$$

Durch lineare Transformation beider Variablen erhält man schließlich

Satz 12: *Eine allgemeine schlichte Funktion $F(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z|<R$ der Relation mit den Invarianzeigenschaften von Satz 1, § 2*

$$\left[8\,\frac{F'''(z)}{F'(z)}-12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2\right]+3\left[\frac{(F(z_0)-N)\,F'(z)}{(F(z)-F(z_0))\,(F(z)-N)}\right]^2-3\left[\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)\,(R^2-\bar{z}_0 z)}\right]^2$$
$$\leq\frac{12R\,[|R^2-\bar{z}_0 z|+R|z-z_0|]^2}{(R^2-|z|^2)^2\,|z-z_0|\,|R^2-\bar{z}_0 z|}.$$

Die Ungleichung besitzt Koebesche *Schrankenfunktionen.*

Diese Ungleichung liefert eine Verschärfung der früheren § 9, (1) und § 4, Satz 3, von denen die erste nur den ersten, die zweite nur die Differenz des zweiten und dritten Terms auf der linken Seite von Satz 12 abschätzt.

Aus Satz 12 gewinnt man, wenn man $F(z)=f(z)$, $z=0$, $\lim N=\infty$ setzt, eine implizite Abschätzung für die Funktion $f(z)$:

$$\left|\left(\frac{c_1}{f(z)}\right)^2+16\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)-\left(\frac{R^2-|z|^2}{R^2 z}\right)^2\right|\leq\frac{4(R+|z|)^2}{R^3|z|}. \tag{5}$$

Die Formel ergänzt die frühere von § 4, (14) der sie mit Ausnahme des dort fehlenden mittleren Terms auf der linken Seite gleicht. Ferner führt Satz 12 für $\lim z_0=\mathfrak{p}$ auf

$$\left\{\begin{aligned}&\left|8\frac{F'''(z)}{F'(z)}-12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2+3\left(\frac{F'(z)}{F(z)-N}\right)^2-3\left[\frac{R^2-|\mathfrak{p}|^2}{(z-\mathfrak{p})(R^2-\bar{\mathfrak{p}}z)}\right]^2\right|\\&\qquad\leq\frac{12R\,[|R^2-\bar{\mathfrak{p}}z|+R|z-\mathfrak{p}|]^2}{(R^2-|z|^2)^2|z-\mathfrak{p}||R^2-\bar{\mathfrak{p}}z|}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

und für $\lim|z_0|=R$ auf

$$\left|8\frac{F'''(z)}{F'(z)}-12\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2+3\left[\frac{(\varrho-N)F'(z)}{(F(z)-\varrho)(F(z)-N)}\right]^2\right|\leq\frac{48R^2}{(R^2-|z|^2)^2}. \tag{7}$$

Die letzte Formel verschärft die früheren § 9, (1) und § 4, (17). Insbesondere erhält man hieraus für $z=0$

$$\left|16\left(\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)+a_1^2\left(\frac{1}{N-a_0}-\frac{1}{\varrho-a_0}\right)^2\right|\leq\frac{16}{R^2} \tag{8}$$

und durch weitere Spezialisierung auf eine Funktion $f(z)$

$$\left|16\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)+\left(\frac{c_1}{\varrho}\right)^2\right|\leq\frac{16}{R^2}. \tag{9}$$

Durch diese Ungleichung und den KOEBEschen Satz

$$\left|\frac{c_1}{\varrho}\right|^2\leq\frac{16}{R^2}$$

wird die Größe $1/\varrho^2$ auf das Innere eines abgeschlossenen Kreisbogenzweiecks beschränkt, das nur im Falle

$$\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}=0$$

in einen vollen Kreis entartet. — Die Formeln (8) und (9) liefern Abschätzungen nach oben für R.

Setzt man in Ungleichung (6) $z=0$, so kann das Resultat

$$\left|\left(\frac{a_1}{N-a_0}\right)^2+\frac{16a_3}{a_1}-\frac{16a_2^2}{a_1^2}-\left(\frac{R^2-|\mathfrak{p}|^2}{R^2\mathfrak{p}}\right)^2\right|\leq\frac{4(R+|\mathfrak{p}|)^2}{R^3|\mathfrak{p}|} \tag{10}$$

zur Abschätzung von $N-a_0$ dienen. Die Größe $\frac{1}{(N-a_0)^2}$ wird auf das Innere eines Kreises beschränkt. Dagegen sind die der Bedingung

$$\left|\left(\frac{a_1}{w-a_0}\right)^2+\frac{16a_3}{a_1}-\frac{16a_2^2}{a_1^2}-\left(\frac{R^2-|\mathfrak{p}|^2}{R^2\mathfrak{p}}\right)^2\right|>\frac{4(R+|\mathfrak{p}|)^2}{R^3|\mathfrak{p}|}$$

genügenden Zahlen w Funktionswerte von $F(z)$.

In dem speziellen Falle $a_0 = 0$ kann man aus (10) die Abschätzung

$$(11) \qquad \frac{1}{M^2(R)} \geq \left| \frac{16 a_3}{a_1^3} - \frac{16 a_2^2}{a_1^4} - \left(\frac{R^2 - |p|^2}{a_1 R^2 p} \right)^2 \right| - \frac{4 (R + |p|)^2}{|a_1|^2 R^3 |p|}$$

gewinnen. Sie geht in eine Gleichung über für die Funktion

$$F(z) = \frac{z}{R^2 \cdot \left(|p| + \frac{R^2}{|p|} \right) z + z^2}.$$

Für die analoge Abschätzung von $m(R)$ ist keine Schrankenfunktion bekannt.

§ 12. Folgerungen aus einer Formel von Löwner.

Während alle bisherigen Ergebnisse auf dem in § 2 bewiesenen verallgemeinerten Flächensatz beruhen, sollen in diesem Paragraphen noch einige Formeln hergeleitet werden, deren Grundlage die bekannte Löwnersche Abschätzung

$$(1) \qquad |c_3| \leq \frac{3 |c_1|}{R^2}$$

ist [s. Math. Ann. **89** (1923).]

Zunächst ist zu bemerken, daß man aus dieser Formel einen Satz analog Satz 6 in § 5 gewinnen kann.

Durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variablen, die den Kreis in sich überführt, erhält man aus obengenannter Ungleichung den

Satz 13: *Eine schlichte Funktion $f(z)$ genügt im Innern des Kreises $|z| < R$ der Ungleichung:*

$$|(R^2 - |z|^2)^2 f'''(z) - 6\bar{z}(R^2 - |z|^2) f''(z) + 6\bar{z}^2 f'(z)| \leq 18 R^2 |f'(z)|.$$

Diese Relation besitzt die Koebesche *Schrankenfunktion* $\frac{z}{(R - z)^2}$.

Gemäß § 4, (7) läßt sich diese Ungleichung in

$$(2) \qquad |(R^2 - |z|^2)^2 f'''(z) - 6\bar{z}(R^2 - |z|^2) f''(z) + 6\bar{z}^2 f'(z)| \leq 18 \frac{|f'(0)| R^4 (R + |z|)}{(R - |z|)^3}$$

vergröbern.

In den weiteren Untersuchungen wird es sich ausschließlich um die Änderungen der Funktionswerte längs eines beliebigen, aber konstanten Radius handeln. Dementsprechend werde gesetzt:

$$z = r e^{i\vartheta}, \qquad \vartheta \text{ konstant}, \qquad f(z) = h(r).$$

Die Ungleichung (2) geht hierdurch über in

$$(3) \qquad |(R^2 - r^2)^2 h'''(r) - 6r(R^2 - r^2) h''(r) + 6r^2 h'(r)| \leq 18 \frac{|h'(0)| R^4 (R + r)}{(R - r)^3}.$$

Zwecks Integration dieser Formel wird der Ansatz

$$\frac{d}{dr} [\varphi_1(r) h''(r) + \varphi_2(r) h'(r) + \varphi_3(r) h(r)]$$
$$= \varphi_4(r) [(R^2 - r^2)^2 h'''(r) - 6r(R^2 - r^2) h''(r) + 6r^2 h'(r)]$$

gemacht, der durch die Funktionen

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_1(r) = (R^2 - r^2)^2 \left[a\, t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + c \right] \\ \varphi_2(r) = (R^2 - r^2) \left[-a\left(i\sqrt{2}\,R + 2r\right) t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\left(i\sqrt{2}\,R - 2r\right) t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} - 2cr \right] \\ \varphi_3(r) = 2c\,R^2 \\ \varphi_4(r) = a\, t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + b\, t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + c \\ t = \dfrac{R+r}{R-r} \end{cases}$$

befriedigt wird. Es sind nur solche Funktionen $\varphi_4(r)$ von Interesse, die in einem Intervall der Variablen r reell und nichtnegativ sind. Definiert man

$$t^{\frac{i}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \lg t}, \qquad \lg t \geqq 0,$$

so wird diese Forderung sogar im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq r \leqq R$ erfüllt, falls

$$\bar{c} = c > 0, \qquad b = \bar{a}, \qquad |a| \leqq \frac{c}{2}.$$

Die Konstanten a, b, c mögen diesen Bedingungen entsprechend gewählt werden; dann gilt Ungleichung (3) auch nach Multiplikation mit $\varphi_4(r)$, und sie kann zwischen den Grenzen r_1 und r_2, $0 \leqq r_1 < r_2 \leqq R$, integriert werden. Man erhält

$$(5)\quad \begin{cases} \left| \left[\varphi_1(r_2)\, h''(r_2) + \varphi_2(r_2)\, h'(r_2) + 2c\,R^2\, h(r_2) \right] - \right. \\ \qquad \left. - \left[\varphi_1(r_1)\, h''(r_1) + \varphi_2(r_1)\, h'(r_1) + 2c\,R^2\, h(r_1) \right] \right| \\ \qquad \leqq \dfrac{|h'(0)|\, R^3}{2} - \left\{ t_2^2 \left[\left(8 - 2i\sqrt{2}\right) a\, t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \left(8 + 2i\sqrt{2}\right) \bar{a}\, t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + 9c \right] - \right. \\ \qquad \left. - t_1^2 \left[\left(8 - 2i\sqrt{2}\right) a\, t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \left(8 + 2i\sqrt{2}\right) \bar{a}\, t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} + 9c \right] \right\} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad 0 \leqq r_1 < r_2 \leqq R, \qquad \bar{c} = c > 0, \qquad |a| \leqq \frac{c}{2}. \end{cases}$$

Die Ungleichung besitzt unabhängig von der Wahl der Konstanten die Schrankenfunktion $\frac{z}{(R-z)^2}$. Um eine übergroße Komplikation der Formeln zu vermeiden, beschränken sich die nachstehenden Ausführungen auf den Fall $a = 0$, also die Relation [aus (5)]:

$$(6)\quad \begin{cases} \left| \left[(R^2 - r_2^2)^2\, h''(r_2) - 2r_2 (R^2 - r_2^2)\, h'(r_2) + 2R^2\, h(r_2) \right] - \right. \\ \qquad \left. - \left[(R^2 - r_1^2)^2\, h''(r_1) - 2r_1 (R^2 - r_1^2)\, h'(r_1) + 2R^2\, h(r_1) \right] \right| \\ \qquad \leqq \frac{9}{2} |h'(0)|\, R^3 (t_2^2 - t_1^2), \qquad \text{falls} \qquad 0 \leqq r_1 < r_2 \leqq R. \end{cases}$$

Zum Zwecke ihrer Integration wird der Ansatz

$$\frac{d}{dr}\left[\psi_1(r)\,h'(r)+\psi_2(r)\,h(r)\right]$$
$$=\psi_3(r)\left[(R^2-r^2)^2\,h''(r)-2r(R^2-r^2)\,h'(r)+2R^2\,h(r)\right]$$

gemacht. Das allgemeine reelle Integral dieses Differentialsystems hat, unter Weglassung einer willkürlichen multiplikativen Konstante, den Ausdruck

$$(7)\qquad \begin{cases} \psi_1(r)=\dfrac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r^2)\,\mu \\ \psi_2(r)=\lambda \\ \psi_3(r)=\dfrac{i\,\mu}{\sqrt{2}\,R(R^2-r^2)} \\ \lambda=\varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}+\bar{\varepsilon}\,t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}, \qquad |\varepsilon|=1 \\ \mu=\varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-\bar{\varepsilon}\,t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}. \end{cases}$$

Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen festzustellen dafür, daß die Funktion $\psi_3(r)$ in einem Intervall $0\leqq r_1\leqq r\leqq r_2\leqq R$ nichtnegativ ausfällt. — Die gestellte Forderung ist gleichbedeutend damit, daß der Ausdruck

$$i\left(\varepsilon t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-\bar{\varepsilon}\,t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)\geqq 0$$

in einem gewissen Intervall $t_1\,t_2$, $t_2>t_1$. Hierfür ist notwendig und hinreichend

$$-\pi\leqq \arc\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t\leqq 0, \qquad t_1\leqq t\leqq t_2.$$

(Die Hinzufügung eines willkürlichen Summanden $2k\pi$ zu $\arc\varepsilon$ ist bedeutungslos.)

Falls ε den schärfsten hierin enthaltenen Ungleichungen

$$-\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\leqq \arc\varepsilon\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2$$

genügt, befriedigt es auch die vorhergehenden. Die letzten Bedingungen sind dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$(8)\qquad \begin{cases} -\pi-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2, \\ t_2\leqq e^{\pi\sqrt{2}}\,t_1, \\ r_2\leqq R^2\dfrac{s+r_1}{R^2+s\,r_1}, \\ s=R\dfrac{e^{\pi\sqrt{2}}-1}{e^{\pi\sqrt{2}}+1}\sim 0{,}976\,75\,R \end{cases}$$

Das Intervall $r_1 r_2$, in dem $\psi_3(r)$ nichtnegativ ausfällt, hat nie die Länge des vollen Radius R. Soll die obere Schranke für r_2 in der Nähe von R liegen, so muß das untere Intervallende r_1 ebenfalls in der Nähe von R gewählt werden.

Aus Ungleichung (6) erhält man durch Multiplikation mit $\psi_3(r_2)$ und Integration von r_2 bis r_3 nach dem zuletzt Bewiesenen

$$
(9)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r_3^2)\,\mu_3 h'(r_3)+\lambda_3 h(r_3)-\frac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r_2^2)\,\mu_2 h'(r_2)-\lambda_2 h(r_2)\right]+\right. \\ \qquad \left.+\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2R^2}\left[(R^2-r_1^2)^2 h''(r_1)-2r_1(R^2-r_1^2)\,h'(r_1)+2R^2 h(r_1)\right]\right| \\ \qquad \leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left[t_3^2(\lambda_3+2i\sqrt{2}\,\mu_3)-t_2^2(\lambda_2+2i\sqrt{2}\,\mu_2)+9t_1^2(\lambda_2-\lambda_3)\right], \\ \qquad\qquad \text{falls}\quad r_1\leqq r_2\leqq r_3\leqq R^2\frac{s+r_2}{R^2+sr_2}, \\ \qquad\qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2\leqq \arc\varepsilon\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_3. \end{cases}
$$

Setzt man hierin $r_1=0$, so ergibt sich

$$
(10)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r_2^2)\,\mu_2 h'(r_2)+\lambda_2 h(r_2)-\frac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r_1^2)\,\mu_1 h'(r_1)-\lambda_1 h(r_1)\right]+\right. \\ \qquad \left.+\frac{R^2}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\,h''(0)\right| \\ \qquad \leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left[t_2^2(\lambda_2+2i\sqrt{2}\,\mu_2)-t_1^2(\lambda_1+2i\sqrt{2}\,\mu_1)+9(\lambda_1-\lambda_2)\right], \\ \qquad\qquad \text{falls}\quad r_1\leqq r_2\leqq R^2\frac{s+r_1}{R^2+sr_1}, \\ \qquad\qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\leqq \arc\varepsilon\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2. \end{cases}
$$

Wiederum durch die Substitution $r_1=0$ geht diese Relation über in

$$
(11)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{i}{\sqrt{2}\,R}(R^2-r^2)\,\mu\,h'(r)+\lambda\,h(r)\right]+\frac{i\,h'(0)}{\sqrt{2}}R(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)+\frac{h''(0)}{2}R^2(\bar{\varepsilon}+\varepsilon-\lambda)\right| \\ \qquad \leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left[t^2(\lambda+2i\sqrt{2}\,\mu)-9\lambda+8(\bar{\varepsilon}+\varepsilon)+2i\sqrt{2}(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)\right], \\ \qquad\quad \text{falls}\quad r\leqq s,\qquad -\pi\leqq\arc\varepsilon\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t. \end{cases}
$$

Die Ungleichungen (9) bis (11) enthalten außer den Variablen noch die willkürliche Konstante ε. Schrankenfunktion ist, unabhängig von ε, die KOEBEsche Funktion $\frac{z}{(R-z)^2}$.

Ein ähnlicher Ansatz wie bei den Ungleichungen (3) und (6) gestattet auch bei (9) bis (11) eine Integration. So gewinnt man aus (11):

$$(12)\quad \begin{cases} \left|\left[\frac{h(r_1)}{\mu_1}-\frac{h(r_2)}{\mu_2}\right]+\frac{1}{8}\left[i\sqrt{2}\,h'(0)\,R(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)+h''(0)\,R^2(\bar{\varepsilon}+\varepsilon)\right]\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)+\right. \\ \qquad \left.+\frac{h''(0)}{2}R^2\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)\right| \\ \leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4\sqrt{2}}\left\{i\sqrt{2}\left(\frac{t_1^2-9}{\mu_1}-\frac{t_2^2-9}{\mu_2}\right)+\left[(\varepsilon-\bar{\varepsilon})+2i\sqrt{2}\,(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\right]\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right\}, \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\leqq r_2\leqq s, \qquad -\pi\leqq \arg\varepsilon\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_2. \end{cases}$$

Benennt man in (10) r_2 in r_3 um und integriert über r_1 von r_1 bis r_2 sowie über r_3 von r_3 bis r_4, so geht die Ungleichung

$$(13)\quad \begin{cases} \left|\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\left[\frac{h(r_4)}{\mu_4}-\frac{h(r_3)}{\mu_3}\right]+\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\left[\frac{h(r_2)}{\mu_2}-\frac{h(r_1)}{\mu_1}\right]+\right. \\ \qquad \left.+\frac{h''(0)}{2}R^2\left[\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)+\left(\frac{1}{\mu_3}-\frac{1}{\mu_4}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right]\right| \\ \leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left\{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\left(\frac{t_4^2}{\mu_4}-\frac{t_3^2}{\mu_3}\right)+\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)\left(\frac{t_2^2}{\mu_2}-\frac{t_1^2}{\mu_1}\right)\right]+\right. \\ \qquad \left.+9\left[\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}-\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)+\left(\frac{1}{\mu_3}-\frac{1}{\mu_4}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right]\right\}, \\ \qquad \text{falls}\quad r_1\leqq r_2\leqq r_3\leqq r_4\leqq R^2\frac{s+r_1}{R^2+sr_1}, \\ \qquad -\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_1\leqq \arg\varepsilon\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg t_4 \end{cases}$$

hervor.

Die Durchführung des naheliegenden Gedankens, diejenigen Werte von ε zu ermitteln, für die die letzten fünf Ungleichungen am schärfsten ausfallen, führt zu komplizierten Rechnungen und wegen der der Zahl ε auferlegten Beschränkungen zu Falleinteilungen. Es mag daher hier genügen, ε durch spezielle Annahmen zu beseitigen.

In (11) führt die Substitution $\varepsilon=t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}$ auf $\lambda=2$, $\mu=0$, also:

$$\left|h(r)+\frac{i\,h'(0)}{2\sqrt{2}}R\left(t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)+\frac{h''(0)}{4}R^2\left(t^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right)^2\right|$$

$$\leqq \frac{|h'(0)|\,R}{4}\left[t^2-1+i\sqrt{2}\left(t^{\frac{i}{\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)+4\left(t^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}-t^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right)^2\right], \qquad \text{falls}\quad r\leqq s.$$

Durch Rückgang auf die Variablen z und $f(z)$ gewinnt man hieraus den

Satz 14: *Eine schlichte Funktion $f(z)$ genügt in dem abgeschlossenen Kreise $0 \leqq |z| \leqq s$ der Ungleichung*

$$\begin{aligned} f(z) + \frac{i f'(0) R z}{2\sqrt{2}\,|z|}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] + \\ + \frac{f''(0) R^2 z}{4\bar{z}}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2 \Bigg| \\ \leqq |f'(0)|\, R\left\{\frac{R|z|}{(R-|z|)^2} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{R+|z|}{R-|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-|z|}{R+|z|}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2\right\}. \end{aligned}$$

Die Relation besitzt die Schrankenfunktion $\frac{C z}{(R-z)^2}$.

Unter Berücksichtigung der Bedingung $r \leq s$, $\lg t \leq \pi\sqrt{2}$ [s. (8)] läßt sich aus diesem Satze eine Abschätzung nach oben für $|f(z)|$ herleiten, die von $\arc z$ frei ist; weiterhin ergibt sich dann aus § 4, (2) eine Abschätzung nach oben für $|f'(z)|$. Hier genüge die Ungleichung

$$(14)\quad \left\{ M(r) \leq \frac{|f'(0)|\, R^2 r}{(R-r)^2} + \left[|f'(0)|\, R - \frac{|f''(0)|\, R^2}{4}\right]\left[\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^{\frac{i}{2\sqrt{2}}}\right]^2 \right.$$
$$\text{für} \quad 0 \leq r \leq s.$$

Sie besitzt noch die Schrankenfunktion $\frac{C z}{(R-z)^2}$. Diese Formel ist — in einem kleineren Kreise — eine Verbesserung der bekannten Verzerrungsformel von § 4, (5).

Ungleichung (12) nimmt für $\varepsilon = -1$ die einfachere Form an

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \left[\frac{h(r_2)}{t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}} - \frac{h(r_1)}{t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}}\right]\left[t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right] + \right. \\ &\qquad + \frac{h''(0)}{2} R^2 \left[\frac{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}} - \frac{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}\right] \Bigg| \\ &\qquad \leq i\,|h'(0)|\, R \left| \frac{t_2^2 - 1}{4\left(t_2^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)} - \frac{t_1^2 - 1}{4\left(t_1^{\frac{i}{\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}}{t_2^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} + t_2^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{\frac{i}{2\sqrt{2}}} - t_1^{-\frac{i}{2\sqrt{2}}}} \right|, \\ &\qquad \text{falls } r_1 \leq r_2 \leq s. \end{aligned} \right.$$

Setzt man in (13) $r_3 = r_2$, so fällt die willkürliche Konstante ε heraus, und es ergibt sich

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{i}{2}}\right]\left[h(r_3) - \frac{h''(0)}{2} R^2\right] + \left[\left(\frac{t_1}{t_3}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^{\frac{i}{2}}\right] \times \\
&\qquad \times \left[h(r_2) - \frac{h''(0)}{2} R^2\right] + \left[\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{\frac{i}{2}}\right]\left[h(r_1) - \frac{h''(0)}{2} R^2\right] \\
&\leq \frac{i\,|h'(0)|\,R}{4}\left\{\left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{i}{2}}\right](9 - t_3^2) + \left[\left(\frac{t_1}{t_3}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^{\frac{i}{2}}\right](9 - t_2^2) + \right. \\
&\qquad \left. + \left[\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^{\frac{i}{2}} - \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{\frac{i}{2}}\right](9 - t_1^2)\right\}, \\
&\qquad\qquad \text{falls} \quad r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq R^2\,\frac{s + r_1}{R^2 + s r_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Auch die beiden letzten Formeln besitzen die Koebesche Schrankenfunktion.

Durch Fortsetzung des beschrittenen Weges lassen sich lineare Ausdrücke aus bis zu acht Funktionswerten abschätzen, doch sind die erzielbaren Ergebnisse ziemlich kompliziert.

Berlin-Charlottenburg, Fasanenstr. 13.

(Eingegangen am 10. Dezember 1952.)

Gaschütz, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 160—170 (1953)

Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen.

Von

Wolfgang Gaschütz[1]).

1. Die *Φ-Untergruppe* $\Phi(\mathfrak{G})$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Sie wurde schon zu einem bemerkenswert frühen Zeitpunkt untersucht: 1885 bewies G. Frattini[2]) mit einer eleganten Schlußweise, daß sie nilpotent ist. Seither ist diese charakteristische Untergruppe jedoch nur in wenigen Arbeiten[2]) eigentlicher Gegenstand der Betrachtung gewesen.

Die folgenden Seiten wollen erneut das Interesse auf die Φ-Untergruppe lenken und mit einfachen Hilfsmitteln zwei Ziele erstreben. Erstens soll eine Charakterisierung der Lage des nach E. Wendt[3]) in jeder endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmten maximalen nilpotenten Normalteilers $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ über der Φ-Untergruppe angegeben werden. In Verallgemeinerung des Ergebnisses von Frattini und eines Satzes von H. Wielandt[4]) wird dazu bewiesen: Aus dem Nilpotentsein einer Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\Psi$, $\mathfrak{N}$, Ψ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, folgt, daß $\mathfrak{N}$ nilpotent ist. Wie wir ferner beweisen, enthält ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der nicht Produkt minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, stets von 1 verschiedene Elemente aus $\Phi(\mathfrak{G})$. Aus beiden Tatsachen ergibt sich sodann: $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$. — Zweitens soll die Arbeit die Bedeutung der Φ-Untergruppe für ein allgemeines Konstruktionsverfahren der endlichen Gruppen, ähnlich dem von H. Fitting[5]) vorgeschlagenem, beleuchten. Es zeigt sich nämlich, daß die von Fitting gegebene Theorie der halbeinfachen Gruppen zu einer Theorie der Φ-freien Gruppen, das sind Gruppen $\mathfrak{F}$ mit $\Phi(\mathfrak{F}) = 1$, ausgedehnt werden kann. Die Zusammensetzung jeder endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ aus Φ-Untergruppe und Φ-freier Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ könnte dann, da $\Phi(\mathfrak{G})$ nilpotent ist, die bei Fitting erforderliche Zwischenkonstruktion der

[1]) Herr Prof. H. Wielandt hat eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen gemacht, die gestatteten, Beweise kürzer zu fassen. Besonders verdanke ich ihm den Hinweis, daß sich mein ursprünglicher und umständlicherer Beweis zu Satz 10 durch den hier gegebenen kurzen ersetzen läßt.

[2]) (a) Frattini, G.: Rend. Atti R. Accad. Lincei (4) **1**, 281—285, 455—457 (1885); **2**, 18 (1886). — (b) Miller, G. A.: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **1**, 6—7 (1915). — (c) Miller, G. A.: Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 20—26 (1915). — (d) Wielandt, H.: Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — (e) Ein Abschnitt ist der Φ-Untergruppe ferner in Ore, Ö.: Duke math. J. **5**, 431—460 (1939) gewidmet:

[3]) Wendt, E.: Math. Ann. **55**, 480 (1902). Siehe auch Fitting, H.: Jber. D. M. V. **48**, 77—145 (1938).

[4]) Wielandt, H.: l. c. [2]) (d).

[5]) Fitting, H.: l. c. [5]).

auflösbaren Gruppen als Radikale (maximale auflösbare Normalteiler) aus den nilpotenten Gruppen umgehen. Dafür stellt sich hier allerdings die Frage ein, welchen genauen Typus die Φ-Untergruppen unter den nilpotenten Gruppen haben. Wenn wir diese im folgenden vorerst auch nur unvollständig beantworten können, so scheint sie uns doch einfacher zu sein, als das bei FITTING auftretende Erweiterungsproblem zur Gewinnung der auflösbaren Gruppen[6]).

Die Kenntnis der Arbeiten[2]) ist nicht erforderlich, es wird alles von der angegebenen Definition der Φ-Untergruppe her neu entwickelt. Unter Gruppen verstehen wir stets solche von endlicher Ordnung. *Nilpotent* heißt eine Gruppe, in der die Sylowgruppen invariante Untergruppen sind, *halbeinfach*, wenn sie keine invariante abelsche Untergruppe enthält. Eine einfache nichtzyklische Gruppe nennen wir *eigentlich-einfach*. Invariante Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir oft kürzer als *Normalteiler* von $\mathfrak{G}$. Ohne nochmalige Erläuterung verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$\mathsf{A}(\mathfrak{G})$ Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$,
$\mathsf{J}(\mathfrak{G})$ Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ Zentrum von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$,
$\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$,
$\Phi(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$,
$\Delta(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen und nicht invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Bezeichnungen wie $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ und ähnliche, die *vollreduzible* Gruppen betreffen, werden auf S. 163 erläutert. $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ impliziert zum Unterschied von $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

2. Wir schicken zwei Definitionen voraus, die mit der Φ-Untergruppe in engem Zusammenhange stehen, wie wir sehen werden.

Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{N} \cap \overline{\mathfrak{G}} = 1$, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ *zerspaltet* bzw. *zerfällt* über $\mathfrak{N}$.

Zunächst wollen wir mit dem ersten dieser beiden Begriffe eine Charakterisierung der Φ-Untergruppe angeben, die sich bei der Benutzung der Isomorphiesätze für unsere Zwecke als sehr handlich erweist.

Dazu sei vorerst etwas allgemeiner $\mathfrak{W}$ ein Komplex von Elementen aus $\Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{H}$ ein beliebiger Komplex aus $\mathfrak{G}$. Wird dann $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{H}\}$ von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ erzeugt, so ist schon $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{H}\}$; anderenfalls würde nämlich für eine maximale Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, die $\{\mathfrak{H}\}$ enthält, $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{G}^*\}$ gelten, im Widerspruch zu $\mathfrak{W} \leqq \Phi(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{G}^*$. Folgt umgekehrt für einen festen Komplex $\mathfrak{W}$ und alle Komplexe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{W}, \mathfrak{H}\}$ schon $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{H}\}$, so liegt $\mathfrak{W}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, wie wir zeigen wollen. Dazu genügt es, $\mathfrak{H}$ alle maximalen Untergruppen $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ durchlaufen zu lassen; da $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}^*$, ist dann auch $\mathfrak{G} \neq \{\mathfrak{W}, \mathfrak{G}^*\}$, d.h. $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{G}^*$. — $\Phi(\mathfrak{G})$ enthält also genau die Elemente von $\mathfrak{G}$, die in jedem Komplex zur Erzeugung von $\mathfrak{G}$ überflüssig sind.

[6]) FITTING, H.: l. c. [5]) § 16.

Offenbar gelten die Betrachtungen des vorigen Absatzes auch noch, wenn man an Stelle von $\mathfrak{H}$ überall die von $\mathfrak{H}$ erzeugte Untergruppe, also eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ setzt. Ist dann $\mathfrak{W} = \mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so entnimmt man ihnen insbesondere

Satz 1. *Für einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ gilt dann und nur dann $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, wenn $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{N}$ nicht zerspaltet.*

Es folgen einige Sätze, die, für sich betrachtet, nur propädeutischen Charakter haben. Sie gestatten, die Beweise in den nachfolgenden Abschnitten übersichtlicher zu machen.

Satz 2. *Ψ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $\Phi(\mathfrak{G}/\Psi) = \Phi(\mathfrak{G})/\Psi$.*

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß der natürliche Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\Psi$ einen Verbandsisomorphismus des Verbandes der Ψ umfassenden Untergruppen von $\mathfrak{G}$ auf den Verband der Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Psi$ induziert.

Satz 3. *Ist σ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$, so ist*

$$\sigma\Phi(\mathfrak{G}) \subseteq \Phi(\sigma\mathfrak{G}). \tag{2.1}$$

Beweis. $\Phi(\sigma\mathfrak{G})$ entspricht in $\mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\mathfrak{T}$ der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die den Kern von σ enthalten. Da $\mathfrak{T}$ auch $\Phi(\mathfrak{G})$ enthält, gilt (2.1).

(2.1) kann nicht zu $\sigma\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\sigma\mathfrak{G})$ verschärft werden, wie das Beispiel der Gruppe $\mathfrak{G} = \{A, B; A^5 = B^4 = A^3BAB^{-1} = 1\}$ in bezug auf den natürlichen Homomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ auf die zu dem von A erzeugten Normalteiler $\mathfrak{N}$ gehörige Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ lehrt. Es ist $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ vom Typus der zyklischen Gruppe der Ordnung 4; daher, wie leicht einzusehen, $\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \neq \Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$.

Satz 4. $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.

Beweis. Wäre $\mathfrak{G}^*$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \not\subseteq \mathfrak{G}^*$, so müßte

$$\left(\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\right)\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} \tag{2.2}$$

gelten. Da $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ im Zentrum liegt, wäre dann $\mathfrak{G}^*$ Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe; nach Voraussetzung also $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{G}^*$, im Widerspruch zu (2.2).

Satz 5. *Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler, $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$, so ist $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Aus $\mathfrak{N} \not\subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ würde $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ nach Satz 1 folgen; hieraus $\mathfrak{N} \not\subseteq \overline{\mathfrak{G}}$, also erst recht $\mathfrak{N} \not\subseteq \overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U}$ und

$$\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U} < \mathfrak{U}. \tag{2.3}$$

Nach den Isomorphiesätzen wäre ferner

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{U}). \tag{2.4}$$

(2.3) und (2.4) stehen aber nach Satz 1 im Widerspruch zu $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$. Also ist $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.

Satz 6[7]). *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, *so ist* $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$.

Beweis. Nach Satz 5 ist jedenfalls $\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Um zu prüfen, wie weit $\Phi(\mathfrak{G})$ über $\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$ hinausragt, setzen wir $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N}) = \tilde{\mathfrak{G}}$ und bilden $\Phi(\tilde{\mathfrak{G}})$ gemäß Satz 2. Es ist $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{M}} \times \tilde{\mathfrak{N}}$, $\tilde{\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{M}\,\Phi(\mathfrak{M})$, $\tilde{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{N}\,\Phi(\mathfrak{N})$. Nach Satz 2 ist $\Phi(\tilde{\mathfrak{M}}) = 1$, $\Phi(\tilde{\mathfrak{N}}) = 1$, also der Durchschnitt der $\tilde{\mathfrak{M}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{N}}$ umfassenden maximalen Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{G}}$ gleich $\tilde{\mathfrak{M}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{N}}$. Wegen $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \tilde{\mathfrak{N}} = 1$ ist daher $\Phi(\tilde{\mathfrak{G}}) = 1$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$; w. z. b. w.

Für die nächsten Sätze und im letzten Abschnitt benötigen wir einige einfache Tatsachen über vollreduzible Gruppen, die wir an dieser Stelle mitteilen wollen. Die Beweise sind mit den bekannten Verallgemeinerungen der Sätze von R. Remak über direkte Produktzerlegungen endlicher Gruppen leicht zu führen und seien dem Leser überlassen[8]).

Mit einer Untergruppe Γ von $A(\mathfrak{N})$ nennen wir eine Gruppe $\mathfrak{N}$ *Γ-vollreduzibel*, wenn $\mathfrak{N}$ Produkt minimaler unter Γ invarianter Untergruppen von $\mathfrak{N}$ ist. Ist $\mathfrak{N}$ speziell Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$, Γ die Gruppe der durch die Transformationen mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$ induzierten Automorphismen und $\mathfrak{N}$ Γ-vollreduzibel, so sagen wir: $\mathfrak{N}$ ist *$\mathfrak{G}$-vollreduzibel*. $\mathfrak{N}$ ist dann Produkt minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Zu jedem Normalteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$ existiert ein Normalteiler $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}'$ ist. Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft einer Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ die $\mathfrak{G}$-Vollreduzibilität von $\mathfrak{N}$. Für $\mathfrak{G}$-vollreduzibles $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_\alpha$ den maximalen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}_\alpha$ ist direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung. Nach der vorher gemachten Bemerkung besteht eine direkte Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\alpha \times \mathfrak{N}_\eta$. $\mathfrak{N}_\eta$ ist hierdurch eindeutig bestimmt, halbeinfach und, genauer, direktes Produkt eigentlich-einfacher Gruppen. $\mathfrak{N}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{N}_\eta$ nennen wir die *abelsche* bzw. die *halbeinfache Komponente von* $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{N}$ sei ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{Z}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ bezeichnen wir das Produkt der minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{Z}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ ist der maximale in $\mathfrak{N}$ enthaltene $\mathfrak{G}$-vollreduzible Normalteiler. Mit $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ bezeichnen wir den Durchschnitt der in $\mathfrak{N}$ maximalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$-vollreduzibel und $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N})$ enthält keinen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$-vollreduzibler Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$. $\mathfrak{Z}_\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$ nennen wir den *Sockel*[9]) bzw. *Rumpf* von $\mathfrak{G}$ und schreiben statt dessen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}$-vollreduzibel, so sagen wir kürzer $\mathfrak{G}$ ist *vollreduzibel*. Die drei Aussagen $\mathfrak{Z}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}(\mathfrak{N}) = 1$ und $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{G}$-vollreduzibel sind gleichbedeutend.

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{A}$ *abelscher Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *und*

$$\mathfrak{A} \cap \Phi(\mathfrak{G}) = 1, \tag{2.5}$$

so zerfällt $\mathfrak{G}$ *über* $\mathfrak{A}$. *Außerdem ist* $\mathfrak{A}$ *dann* $\mathfrak{G}$*-vollreduzibel.*

[7]) Miller, G. A.: l. c. (2c).

[8]) Man ziehe etwa H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie Bd. I, Leipzig u. Berlin 1937, III, §§ 1,2, S. 75—82 zu Rate.

[9]) Diese Bezeichnung stammt von R. Remak.

Beweis. a sei die Ordnung von $\mathfrak{A}$. Der Satz ist offenbar richtig, wenn $\mathfrak{G}$ beliebig und $a=1$ ist. Wir nehmen an, es sei $a>1$ und der Satz für beliebiges $\mathfrak{G}$ und abelsche Normalteiler mit einer Ordnung $<a$ bewiesen. Dann ist $\mathfrak{A} \not\subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, und nach Satz 1 existiert $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{G}}. \tag{2.6}$$

Hieraus folgt

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{A}.$$

$\overline{\mathfrak{A}} \cap \Phi(\overline{\mathfrak{G}})$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, also auch von $\mathfrak{G}$. Nach Voraussetzung (2.5) und Satz 5 ist $\overline{\mathfrak{A}} \cap \Phi(\overline{\mathfrak{G}}) = 1$. Zufolge (2.6) ist $\overline{\mathfrak{A}} : 1 < a$. Wir können also auf $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ unsere Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten: Es existiert $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} < \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\overline{\mathfrak{G}}} \tag{2.7}$$

$$\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = 1.$$

Setzt man (2.7) in (2.6) ein, so ergibt sich $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ mit $\mathfrak{A} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = \mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{G}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = \overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\overline{\mathfrak{G}}} = 1$; d.h. $\mathfrak{G}$ zerfällt über $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{B}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$, so ist nach dem soeben Bewiesenen $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = 1$. $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ also auch von $\mathfrak{G}$ und es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}$ daher $\mathfrak{G}$-vollreduzibel.

Satz 8. *Für einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Da nach Satz 2 $\Phi(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = \Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist, muß $\mathfrak{A}\,\Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ nach Satz 7 $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$-vollreduzibel sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ ist.

3.[10]) Satz 6 gestattet unmittelbar die Bestimmung der Φ-Untergruppe einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}_{p^\nu}$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^ν, so ist $\Phi(\mathfrak{A})$ offenbar die einzige in $\mathfrak{A}$ enthaltene zyklische Untergruppe von der Ordnung $p^{\nu-1}$. Ist $\mathfrak{A}$ direktes Produkt solcher Gruppen, $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^{(1)}_{p^{\nu_1}} \times \cdots \times \mathfrak{Z}^{(r)}_{p^{\nu_r}}$, so ist nach Satz 6 $\Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}^{(1)}_{p^{\nu_1-1}} \times \cdots \times \mathfrak{Z}^{(r)}_{p^{\nu_r-1}}$, $\mathfrak{Z}^{(i)}_{p^{\nu_i-1}} < \mathfrak{Z}^{(i)}_{p^{\nu_i}}$. $\Phi(\mathfrak{A}) = 1$ tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{A}$ direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung ist.

In einer nilpotenten Gruppe $\mathfrak{L}$ ist jede maximale Untergruppe $\mathfrak{L}^*$ bekanntlich Normalteiler und $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}^*$ abelsch. $\Phi(\mathfrak{L})$ ist also der Rumpf von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}/\Phi(\mathfrak{L})$ abelsch. Wir können daher die für abelsche Gruppen gemachte Feststellung erweitern zu

Satz 9. *Ist $\mathfrak{L}$ nilpotent, so gilt $\Phi(\mathfrak{L}) = 1$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{L}$ direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung ist.*

4. Es ist erstaunlich, daß sich aus der rein verbandstheoretischen Definition der Φ-Untergruppe ziemlich starke Einschränkungen hinsichtlich des

[10]) Der Inhalt dieses Abschnittes findet sich im wesentlichen schon bei W. BURNSIDE, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **13**, 6—12 (1913/14).

gruppentheoretischen Typus für diese und gewisse über der Φ-Untergruppe liegende Gruppen ergeben. In Verallgemeinerung der eingangs erwähnten Schlußweise von FRATTINI beweisen wir nämlich:

Satz 10. *$\mathfrak{M}$ und Ψ seien Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \subseteq \mathfrak{M} \cap \Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{M}/\Psi$ nilpotent. Dann ist $\mathfrak{M}$ nilpotent.*

Beweis. Der Fall $\mathfrak{M} = 1$ kann beiseite gelassen werden. p sei eine in $\mathfrak{M}:1$ aufgehende Primzahl und $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}$. Wir zeigen: $\mathfrak{P}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{M}$. $\Psi\mathfrak{P}/\Psi$ ist p-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}/\Psi$ und daher nach Voraussetzung charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{M}/\Psi$, $\Psi\mathfrak{P}$ also Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{P}$ ist p-Sylowgruppe auch von $\Psi\mathfrak{P}$. N sei der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$. Da alle p-Sylowgruppen von $\Psi\mathfrak{P}$ schon unter $\Psi\mathfrak{P}$ konjugiert sind, ist $G\mathfrak{P}G^{-1} = L\mathfrak{P}L^{-1}$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$ durch $L = SP \in \Psi\mathfrak{P}$, $S \in \Psi$, $P \in \mathfrak{P}$ lösbar. Daher ist $P^{-1}S^{-1}G \in \mathsf{N}$, $G \in SP\mathsf{N} \subseteq \Psi\mathfrak{P}\mathsf{N} = \Psi\mathsf{N}$, d.h. $\mathfrak{G} = \Psi\mathsf{N}$. Nach Voraussetzung $\Psi \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ und Satz 1 ist dann $\mathsf{N} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ also Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und erst recht von $\mathfrak{M}$; w. z. b. w.

Aus Satz 10 folgt für $\Psi = \Phi(\mathfrak{G})$: $\mathfrak{L}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) = \mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$.

In auflösbaren Gruppen $\mathfrak{G} \neq 1$ ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \neq 1$, wie man leicht einsieht. Da jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe selbst auflösbar ist, hat man nach Satz 10, wenn man wieder $\Phi(\mathfrak{G})$ an Stelle von Ψ betrachtet, $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ für diese.

Eine genaue Charakterisierung des Typus derjenigen Gruppen, die Φ-Untergruppen sind, ist nicht bekannt. 3 lehrt, daß jede abelsche Gruppe Φ-Untergruppe sein kann. Daß das nicht für jede nilpotente Gruppe gilt, zeigt der folgende

Satz 11. *Ψ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Psi \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Es ist*

$$\mathsf{J}(\Psi) \subseteq \Phi\left(\mathsf{A}(\Psi)\right). \tag{4.1}$$

Beweis. Die Transformationen in Ψ mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ induzieren eine homomorphe Abbildung σ von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe U von $\mathsf{A}(\Psi)$. $\sigma\Psi = \mathsf{J}(\Psi)$ liegt nach Satz 2 in $\Phi(\mathsf{U})$ und ist Normalteiler von $\mathsf{A}(\Psi)$. Nach Satz 5 folgt dann die Behauptung des Satzes; w. z. b. w.

Hieraus folgt z. B., daß keine charakteristische Untergruppe einer Φ-Untergruppe vom Typus einer der beiden nichtkommutativen Gruppen der Ordnung 8 sein kann, da bei diesen die innere Automorphismengruppe nicht in der Φ-Untergruppe der vollen Automorphismengruppe liegt.

Indem man Satz 2 anwendet, erkennt man mit Satz 11 ferner, daß auch für jede Faktorgruppe $\overline{\Psi} = \Psi_1/\Psi_2$, Ψ_1, Ψ_2 Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, die Bedingung (4.1) mit $\overline{\Psi}$ an Stelle von Ψ bestehen muß.

5. Befriedigender lassen sich die Typen der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ kennzeichnen. Nach Satz 2 ist $\Phi\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) = \Phi(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$. Wir nennen Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$ Φ-frei. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung der Φ-freien Gruppen, die wir allgemein mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wollen. Wir teilen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften derselben mit.

In $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 5 jeder Normalteiler ebenfalls Φ-frei. Insbesondere ist also $\Phi(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))=1$ und, nach Satz 9, $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ abelsch. In einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{G})_\alpha \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \tag{5.1}$$

und nach Satz 5 und Abschnitt 3 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{L}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Für Φ-freies $\mathfrak{F}$ ist also nach Satz 5 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))=1$, d.h. $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ ist $\mathfrak{F}$-vollreduzibel. Als nilpotenter Normalteiler muß $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ dann abelsch sein und in $\mathfrak{E}(\mathfrak{F})_\alpha$ liegen. Mit (5.1) zusammen erhalten wir daher

Satz 12. *In einer Φ-freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{F}$.*

Wendet man diesen Satz für beliebige Gruppen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{F}$ an, so erschließt man allgemeiner zufolge der im Anschluß an Satz 10 gemachten Bemerkung

Satz 13. *$\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$.*

Aus Satz 7 folgt unmittelbar, daß das Zerfallen einer Gruppe über der abelschen Komponente ihres Sockels notwendig ist für das Φ-Freisein der betreffenden Gruppe. Wir wollen zeigen, daß es auch hinreichend dafür ist. Sei dazu $\mathfrak{G}$ beliebig, $\Phi(\mathfrak{G})\neq 1$. Wir nehmen an, es sei nach Definition des Zerfallens

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{E}(\mathfrak{G})_\alpha \overline{\mathfrak{G}} \tag{5.2}$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{G})_\alpha \cap \overline{\mathfrak{G}}=1. \tag{5.3}$$

Ψ sei minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$. Da Ψ nilpotent ist, ist Ψ abelsch und $\Psi \subseteq \mathfrak{E}(\mathfrak{G})_\alpha$. Es existiert ein Normalteiler Ψ' von $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})_\alpha=\Psi\times\Psi'$ ist. Dann ist $\mathfrak{G}=\Psi(\Psi'\overline{\mathfrak{G}})$; ferner, wie aus (5.2), (5.3) und Ordnungsbetrachtungen einsichtig wird, $\Psi'\overline{\mathfrak{G}}<\mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}$ zerspaltet über Ψ. Das steht nach Satz 1 im Widerspruch zu $\Psi\subseteq\Phi(\mathfrak{G})$. Die Annahmen (5.2), (5.3) waren also falsch. Wir erhalten damit

Satz 14. *Eine Gruppe ist dann und nur dann Φ-frei, wenn sie über der abelschen Komponente ihres Sockels zerfällt.*

Wir wollen eine Eigenschaft des Zentrums der Φ-freien Gruppen beweisen.

Satz 15. *In einer Φ-freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist*

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}))=\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}) \tag{5.4}$$

und

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})=\Delta(\mathfrak{F}). \tag{5.5}$$

Beweis. Nach Satz 7 ist $\mathfrak{F}=\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{Z}\cap\overline{\mathfrak{F}}=1$, d.h. $\mathfrak{F}=\mathfrak{Z}\times\overline{\mathfrak{F}}$. Da das Zentrum eines direkten Produktes gleich dem direkten Produkt der Zentren der Faktoren ist, ist $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{F}})=1$, woraus (5.4) folgt.

$\mathfrak{D}$ sei der Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{F}$ die invariant unter $\mathfrak{F}$ sind. $\mathfrak{F}/\mathfrak{D}$ ist abelsch. Für $F \in \mathfrak{F}$, $P \in \Delta(\mathfrak{F})$ gilt daher

$$FPF^{-1}P^{-1} \subseteq \mathfrak{D} \cap \Delta(\mathfrak{F}),$$

nach Voraussetzung also $FP = PF$ und $\Delta(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{F})$. Ferner gilt aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \Delta(\mathfrak{G})$ für beliebige Gruppen $\mathfrak{G}$, da aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$ für eine maximale Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ stets folgt: $\mathfrak{G}^*$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Also gilt (5.5), w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{G}$ beliebig, so ergibt insbesondere Satz 15, auf $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}$ angewandt: $\Delta(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist abelsch. Nach Satz 10 erhalten wir daraus

Satz 16. *Für beliebiges $\mathfrak{G}$ ist $\Delta(\mathfrak{G})$ nilpotent.*

6. Satz 14 in Verbindung mit der FITTINGschen Theorie der halbeinfachen Gruppen liefert ein Verfahren, die Φ-freien Gruppen in invarianter Weise als zerfallende Erweiterungen darzustellen. Wir werden in diesem Sinne kurz von einer Konstruktion der Φ-freien Gruppen sprechen, diese im folgenden durchführen und an Hand von ihr entscheiden, wann zwei Φ-freie Gruppen isomorph sind. Wir schicken zunächst das hier benötigte Ergebnis über halbeinfache Gruppen $\mathfrak{H}$ voraus[11]).

(*H*) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ ist direktes Produkt eigentlich-einfacher Gruppen. Der Zentralisator von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ ist 1. Man erhält zu einem vorgegebenen direkten Produkt $\mathfrak{Z}$ eigentlich-einfacher Gruppen ein vollständiges Repräsentantensystem für die Typen aller halbeinfachen Gruppen mit dem Sockel $\mathfrak{Z}$, wenn man in $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})$ aus jeder Klasse unter $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})$ konjugierter, $\mathsf{J}(\mathfrak{Z})$ umfassender Untergruppen einen Repräsentanten H auswählt. $\mathsf{J}(\mathfrak{Z})$ ist dann der Sockel von H.

Da zwei isomorphe Gruppen isomorphe Sockel besitzen, können wir bei der Konstruktion der Φ-freien Gruppen so vorgehen, daß wir alle Φ-freien Gruppen mit einem festen Sockel bestimmen.

Es sei $\mathfrak{Z}$ ein direktes Produkt einfacher Gruppen und nach dem über vollreduzible Gruppen Gesagten

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_\alpha \times \mathfrak{Z}_\eta. \tag{6.1}$$

Da $\mathfrak{Z}_\alpha$ und $\mathfrak{Z}_\eta$ charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{Z}$ sind, ist

$$\mathsf{A}(\mathfrak{Z}) = \mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\alpha \times \mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\eta, \tag{6.2}$$

wobei $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\alpha$, $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\eta$ die Untergruppe der Elemente von $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})$ ist, die $\mathfrak{Z}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{Z}_\eta$ elementweise festlassen. Es ist $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\alpha \cong \mathsf{A}(\mathfrak{Z}_\alpha)$, $\mathsf{A}(\mathfrak{Z})_\eta = \mathsf{A}(\mathfrak{Z}_\eta)$. Zur Vereinfachung der Schreibweise denken wir uns in natürlicher Weise die Elemente aus $A(\mathfrak{Z})_\alpha$ bzw. $A(\mathfrak{Z})_\eta$ mit denen aus $\mathsf{A}(\mathfrak{Z}_\alpha)$ bzw. $\mathsf{A}(\mathfrak{Z}_\eta)$ identifiziert. Die Komponentenzerlegung gemäß (6.1) und (6.2) kennzeichnen wir unmißverständlich in beiden Fällen durch Anhängen des Index α bzw. η. Die Anwendung der Automorphismen $\lambda \in \mathsf{A}(\mathfrak{Z})$ auf $s \in \mathfrak{Z}$ schreiben wir als s^λ.

[11]) FITTING, H.: l. c. [3]) § 10.

Die angekündigte Konstruktion der Φ-freien Gruppen mit einem festen Sockel liefert nun

Satz 17. *$\mathfrak{S}$ sei ein direktes Produkt einfacher Gruppen und $\{\Gamma\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klassen unter $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ konjugierter Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$ mit folgenden Eigenschaften:*

I. *$\mathfrak{S}_\alpha$ ist Γ_α-vollreduzibel.*

II. $\mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta) \leqq \Gamma$.

Durchläuft dann Γ dieses Repräsentantensystem, so bilden die Gruppen $\mathfrak{F}_\Gamma$ mit den Elementen (a, γ), $a \in \mathfrak{S}_\alpha$, $\gamma \in \Gamma$ und der Verknüpfung

$$(a, \gamma)\,(b, \delta) = (a\, b^{\gamma_\alpha}, \gamma\, \delta)$$

ein vollständiges Repräsentantensystem für die Typen der Φ-freien Gruppen mit einem Sockel vom Typus $\mathfrak{S}$.

Beweis. Es ist klar, daß $\mathfrak{F}_\Gamma$ nach der angegebenen Verknüpfung Gruppeneigenschaften hat. Auf Grund der Forderungen I, II und nach (H) erkennt man durch komponentenweises Rechnen leicht, daß die Elemente (a, σ), $a \in \mathfrak{S}_\alpha$, $\sigma \in \mathsf{J}(\mathfrak{S}_\eta)$ eine mit $\mathfrak{S}$ isomorphe und invariante Untergruppe von $\mathfrak{F}_\Gamma$ bilden, die $\mathfrak{F}_\Gamma$-vollreduzibel ist. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{S}^*$, so gilt also

$$\mathfrak{S}^* \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma). \tag{6.3}$$

Jedes Element von $\mathfrak{F}_\Gamma$, das mit $\mathfrak{S}^*$ elementweise vertauschbar ist, liegt in $\mathfrak{S}^*$: Aus

$$(b, \gamma)\,(a, \sigma) = (a, \sigma)\,(b, \gamma)$$

oder

$$(b\, a^{\gamma_\alpha}, \gamma\, \sigma) = (a\, b^{\sigma_\alpha}, \sigma\, \gamma)$$

für alle $(a, \sigma) \in \mathfrak{S}^*$ folgt $\gamma_\alpha = 1$; ferner $\gamma_{\eta_i}\, \sigma_{\eta_i} = \sigma_{\eta_i}\, \gamma_{\eta_i}$ und $\gamma_{\eta_i} = 1$, da 1 nach (H) der Zentralisator von $\mathsf{J}(\mathfrak{S}_{\eta_i})$ ist. $\mathfrak{S}^*$ enthält daher alle minimalen Normalteiler von $\mathfrak{F}_\Gamma$; denn gäbe es außerhalb von $\mathfrak{S}^*$ einen solchen, z. B. $\mathfrak{N}$, so wäre $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}^* = 1$, und also $\mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{N}$ elementweise vertauschbar. Mit (6.3) zusammen haben wir daher $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)$.

$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha$ wird von den Elementen $(a, 1)$, $a \in \mathfrak{S}_\alpha$ gebildet. Bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{F}}_\Gamma$ die Untergruppe der Elemente $(1, \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, so ist offenbar

$$\mathfrak{F}_\Gamma = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha\, \overline{\mathfrak{F}}_\Gamma$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_\Gamma)_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}}_\Gamma = 1.$$

Nach Satz 14 ist $\mathfrak{F}_\Gamma$ daher Φ-frei.

Γ_1, Γ_2 seien Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{S})$, die den Bedingungen I, II genügen, und Λ ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}_{\Gamma_1}$ auf $\mathfrak{F}_{\Gamma_2}$. Bei Λ wird $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}_{\Gamma_1})_\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_{\Gamma_2})_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^*$ auf sich abgebildet. Wir können daher

$$(a, \gamma)^\Lambda = (a^{\lambda_\alpha}\, c_{\Lambda, \gamma}, \gamma^\Lambda)$$

mit $\lambda_\alpha \in \mathsf{A}(\mathfrak{E}_\alpha)$, $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma^{\lambda} \in \Gamma_2$ und gewissen $c_{\lambda,\gamma} \in \mathfrak{E}_\alpha^*$ $c_{\lambda,1} = 1$ setzen. Die Abbildung $\gamma \to \gamma^{\lambda}$ ist dabei ein Isomorphismus von Γ_1 auf Γ_2. Nach (H) folgt hieraus zunächst die Existenz von $\lambda_\eta \in \mathsf{A}(\mathfrak{E}_\eta)$ mit

$$\lambda_\eta \gamma_\eta \lambda_\eta^{-1} = (\gamma^{\lambda})_\eta. \tag{6.4}$$

Außerdem ist einerseits (Multiplikation-Automorphismus)

$$[(1,\gamma)(a,1)]^{\lambda} = (a^{\gamma_\alpha \gamma_\alpha} c_{\lambda,\gamma}, \gamma^{\lambda}) \tag{6.5}$$

andererseits (Automorphismus-Multiplikation)

$$[(1,\gamma)(a,1)]^{\lambda} = (a^{(\gamma^{\lambda})_\alpha \lambda_\alpha} c_{\lambda,\gamma}, \gamma^{\lambda}). \tag{6.6}$$

Vergleich von (6.5) und (6.6) ergibt

$$\lambda_\alpha \gamma_\alpha = (\gamma^{\lambda})_\alpha \lambda_\alpha. \tag{6.7}$$

Aus (6.4) und (6.7) folgt, daß Γ_1 und Γ_2 durch $\lambda = \lambda_\alpha \lambda_\eta$ konjugiert sind.

Umgekehrt gilt: Sind Γ_1, Γ_2 Untergruppen von $\mathsf{A}(\mathfrak{E})$, die I, II erfüllen, und ist $\lambda \Gamma_1 \lambda^{-1} = \Gamma_2$, $\lambda \in \mathsf{A}(\mathfrak{E})$, so erweisen sich $\mathfrak{F}_{\Gamma_1}$ und $\mathfrak{F}_{\Gamma_2}$ auf Grund der Abbildung

$$(a,\gamma) \to (a^{\lambda}, \lambda \gamma \lambda^{-1}), \qquad \gamma \in \Gamma_1,$$

als isomorph.

Sei schließlich $\mathfrak{F}$ eine beliebige Φ-freie Gruppe mit dem Sockel $\mathfrak{E}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$, nach Satz 14

$$\begin{cases} \mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\alpha \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{E}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} = 1 \end{cases} \tag{6.8}$$

und Γ die durch die Transformationen mit den Elementen aus $\overline{\mathfrak{F}}$ induzierte Untergruppe von $\mathsf{A}(\mathfrak{E})$. $\mathfrak{E}_\alpha$ ist Γ_α-vollreduzibel, Γ umfaßt nach (H) $\mathsf{J}(\mathfrak{E}_\eta)$. Γ erfüllt also die Bedingungen I, II. Es ist $\Gamma \simeq \overline{\mathfrak{F}}$, da kein Element $f \in \overline{\mathfrak{F}}$, $f \neq 1$, hierbei $\mathfrak{E}$ elementweise invariant läßt: f^* sei mit $\mathfrak{E}$ elementweise vertauschbar. $[f^*]$ sei der von f^* erzeugte Normalteiler von $\mathfrak{F}$. Er ist ebenfalls mit $\mathfrak{E}$ elementweise vertauschbar. Nach (6.8) liegt er in $\overline{\mathfrak{F}}$. Wäre er $\neq 1$, so müßte nach (6.8) ein minimaler in ihm enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{F}$ einerseits in $\mathfrak{E}_\eta$ liegen, also nichtabelsch sein, andererseits müßte er, weil er in $\mathfrak{E}$ liegt mit sich selbst elementweise vertauschbar sein. Daher ist $f^* = 1$ und $\Gamma \cong \overline{\mathfrak{F}}$. Für

$$f = a\bar{f} \qquad a \in \mathfrak{E}_\alpha, \qquad \bar{f} \in \overline{\mathfrak{F}}$$

gemäß (6.8) erweist sich demzufolge die Abbildung

$$a\bar{f} \to (a,\gamma)$$

als ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}_\Gamma$, wenn γ dabei der durch die Transformation mit f induzierte Automorphismus von $\mathfrak{E}$ ist. Damit ist Satz 17 bewiesen.

Die α-Komponente von Γ induziert als Automorphismengruppe einer vollreduziblen abelschen Gruppe und wegen der Bedingung I eine Summe irreduzibler Darstellungen in endlichen Primkörpern. Der eine Teil der Konstruktion führt also auf das Problem der Bestimmung irreduzibler Darstellungen in solchen Körpern. Der andere Teil erfordert, wie FITTING gezeigt hat, im wesentlichen die Kenntnis der eigentlich-einfachen Gruppen und ihrer Automorphismengruppen.

Kiel, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Januar 1953.)

Hämisch, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 171—185 (1953)

Die Hauptnorm als Determinante über endlichrangigen Algebren mit Einselement.

Von
Werner Hämisch.

Historische Einführung.

In seiner Arbeit „Les déterminants sur un corps non commutatif"[1]) weist J. Dieudonné auf die Unzulänglichkeiten früherer Versuche hin, über gewissen nicht kommutativen Ringen Analoga zur Determinante einzuführen[2]). Nicht besprochen, wenn auch erwähnt, ist die Arbeit „Zur Theorie der linearen Gleichungen"[3]) von E. Study, der als Einziger unter jenen Autoren eine echte Verallgemeinerung des Determinantenbegriffs entdeckte, echt in dem Sinne, daß sie über kommutativen Körpern mit dem üblichen Determinantenbegriff zusammenfällt. Es wird deshalb weiter unten noch auf diese Arbeit einzugehen sein, zumal sie für die hier vorliegende historisch den Ausgangspunkt bildet.

Dieudonné selbst geht davon aus, daß die Determinante einen Homomorphismus der multiplikativen Gruppe der m-reihigen invertierbaren Matrizen über einem Körper $\mathfrak{K}$ auf die multiplikative Gruppe seiner von Null verschiedenen Elemente definiert. Dementsprechend untersucht er ganz allgemein die Homomorphismen einer solchen Gruppe von Matrizen in eine Abelsche Gruppe auch für den Fall, daß an Stelle von $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Schiefkörper $\mathfrak{S}$ betrachtet wird, d.h. er bestimmt die Kommutatorgruppe der Matrizengruppe. Er findet, daß die zugehörige Faktorgruppe nicht von m abhängt, insbesondere also isomorph ist zu der nach dem Kommutator gebildeten Faktorgruppe von $\mathfrak{S}$. Die Bilder der Matrizen bei einem wohldefinierten kanonischen Homomorphismus der Matrizengruppe in die letztgenannte Faktorgruppe nennt Dieudonné Determinanten, weil sie determinantenähnliche Eigenschaften aufweisen und für $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}$ mit den gewöhnlichen Determinanten übereinstimmen. Dieser Determinantenbegriff besitzt den Vorzug großer Allgemeinheit in dem Sinne, daß jede Funktion, die einen Homomorphismus der Gruppe der invertierbaren m-reihigen Matrizen über einem Schiefkörper $\mathfrak{S}$ in eine Abelsche Gruppe definiert (so daß also der Kern dieses Homomorphismus die Kommutatorgruppe enthält) und als Ersatz für die Determinante in Betracht kommt, nur die Bilder der Dieudonnéschen Determinanten bei einem geeigneten

[1]) Dieudonné, J.: Bull. Soc. Math. France **71**, 27—45 (1943).

[2]) Nicht erwähnt ist Sagastume Berra, Determinanten und lineare Gleichungen in Quasikörpern (spanisch), Rev. Univ. Nac. Tucuman, A 1, 123—141, dessen Determinantenbegriff aber im Falle kommutativer Körper weit von dem üblichen entfernt ist.

[3]) Study, E.: Acta math., Stockh. **42**, 1—61 (1920).

Homomorphismus der genannten Abelschen Faktorgruppe von $\mathfrak{S}$ liefert. Im Hinblick auf die Theorie der linearen Gleichungssysteme aber ist festzustellen, daß einerseits die Nichtinvertierbarkeit einer Matrix nur daran erkannt werden kann, daß ein Prozeß sukzessiver Elementarumformungen, der bei invertierbaren Matrizen den Wert der Determinante liefert, für die betreffende Matrix vorzeitig abbricht, und daß andrerseits die von Null verschiedenen Elemente der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit invertierbarer Matrix nach Dieudonné mit Hilfe einer Übertragung der Cramerschen Regel nur modulo des Kommutators der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{S}$ bestimmt werden können.

E. Study dagegen geht in seiner oben erwähnten Arbeit geradewegs auf die exakte Lösung linearer Gleichungssysteme über endlichrangigen Algebren mit Einselement aus, indem er bezüglich einer Basis der Algebra das zugehörige lineare Gleichungssystem über dem Grundkörper der Algebra für die Koordinaten der Unbekannten aufstellt und nach der üblichen Cramerschen Regel löst. Die dabei auftretenden Zählerdeterminanten und die Nennerdeterminante sind Polynome in den Koordinaten der Elemente aus der Matrix des Gleichungssystems. Study stellt fest, daß die Nennerdeterminante (z.B. im Falle des Quaternionenkörpers) noch gemeinsame Faktoren der Zählerdeterminanten enthalten kann. Werden diese Faktoren herausgekürzt, dann nennt Study den so verbleibenden Hauptnenner „Nablafunktion" der Matrix des Gleichungssystems, den er noch so normiert, daß er für die Einheitsmatrix das Einselement des Grundkörpers liefert. Eine explizite Angabe dieses Hauptnenners als Funktion der Elemente der Matrix und darauf aufbauend die Fortsetzung der Determinantentheorie gelingt ihm aber nur im Falle der Quaternionenalgebra, und zwar mit Hilfe komplizierter kombinatorischer Überlegungen. Über den Rahmen der Quaternionen hinaus konnte Study für seine Nablafunktion noch eine Reihe determinantenähnlicher Eigenschaften insbesondere Gradsätze [die sich hier unter anderen in § 5 samt der von Study schon für die Quaternionen mitgeteilten Formel (11) wiederfinden] plausibel machen, wenn auch nicht in allen Teilen exakt beweisen.

Herr W. KRULL nun, der die Studysche Arbeit nur durch ein Referat kannte, vermutete schon lediglich auf Grund der sich bereits bei den Quaternionen ergebenden Gradverhältnisse in der Nablafunktion eine Hauptnorm[4]) der Algebra $\mathfrak{A}_m$ aller m-reihigen Matrizen A über der zugrunde gelegten endlichrangigen Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement und gab so den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit. In der Tat stellt das hier in § 2 bewiesene Theorem 2 nichts anderes als die Krullsche Vermutung dar, wenn beachtet wird, daß die Matrix des von Study über dem Grundkörper $\mathfrak{K}$ gebildeten Gleichungssystems bei einer auf $\mathfrak{A}_m$ fortgesetzten regulären Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$ als Bild der

[4]) Im folgenden wird durch den Hinweis „Jacobson" stets auf die von N. JACOBSON in seinem Buch „The Theory of Rings", S. 111—114, New York 1943, gegebene Darstellung der Theorie eines Minimalpolynoms einer Algebra zurückgegriffen. Die von dorther benötigten Begriffe können aber auch hier aus § 1 entnommen werden, und die benötigten Resultate sind unter römischen Nummern in den Text eingestreut.

Matrix des ursprünglichen Gleichungssystems auftritt. Nach diesem Resultat erscheint die Theorie der Hauptnorm, also die des Minimalpolynoms einer Algebra, im Rahmen der linearen Gleichungstheorie als die natürliche Fortsetzung der Determinantentheorie auf endlichrangige Algebren mit Einselement[5]).

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese Einsicht klar zu vermitteln und die Fragen zu behandeln, die sich von der linearen Gleichungstheorie her für die Theorie der Hauptnorm unmittelbar ergeben. Der Konnex beider Theorien ist in der Tat sehr tiefgreifend. Bezeichnend hierfür ist, daß das auch als Satz der reinen Minimalpolynomtheorie interessierende Theorem 5 sich entscheidend auf das in erster Linie gleichungstheoretische Theorem 4 stützt. Besonders deutlich wird dieser enge Zusammenhang aber durch den Weg, der hier in § 1, wesentlich einfacher als der historische, zur Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante führt. Ihm liegt der nicht ferne Gedanke zugrunde, die Inverse einer Matrix in eben der Weise zu bestimmen, wie sich die Inverse einer algebraischen Zahl mit Hilfe ihres Minimalpolynoms bestimmen läßt.

Es möge nun noch die Hauptnorm kurz mit der Determinante Dieudonné's verglichen werden. Für die Hauptnorm erscheint die Beschränkung auf endlichen Rang unerläßlich (Existenz eines Minimalpolynoms!). Dafür entfällt die Beschränkung auf Divisionsalgebren und invertierbare Matrizen, die durch das Nichtverschwinden ihrer Hauptnormen charakterisiert sind, und es werden durch eine entsprechende Übertragung der Cramerschen Regel exakte Lösungen der linearen Gleichungssysteme ermöglicht. Der Allgemeinheit der Dieudonnéschen Determinante, die (s. oben) vom Gesichtspunkt der Gruppentheorie aus alles, was sonst noch Anspruch auf Determinantenartigkeit erheben könnte, in den zweiten Rang verweist[6]), steht eine Aussage der Einzigartigkeit der Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante gegenüber (Theorem 4), nach der alle Polynome in den Koordinaten der Matrixelemente, die außer der Hauptnorm noch als Ersatz für die Determinante in Betracht gezogen werden mögen und insbesondere eine exakte Lösungen liefernde Cramersche Regel gestatten, nur Vielfache der Hauptnorm sein können.

Hinsichtlich einer Fortführung der vorliegenden Untersuchungen seien die beiden folgenden Punkte bemerkt:

---

[5]) Leider scheint es unmöglich zu sein, lediglich aus der Definition der Determinante als einer Hauptnorm ihre Darstellung als Polynom abzuleiten, ist es doch gerade so, daß alle nicht trivialen Sätze über Hauptnormen letztlich auf Determinantentheoremen fußen, die die Polynomdarstellung (oder damit äquivalente Sätze) der Determinante voraussetzen.

[6]) Also im Falle der Schiefkörper endlichen Ranges über einen kommutativen Unterkörper (Zentrum), wo sowohl die Dieudonnésche Determinante als auch die Hauptnorm definiert ist, auch diese, denn da die Hauptnorm einer invertierbaren Matrix bzw. eines Matrizenproduktes nicht verschwindet bzw. dem Produkt der Hauptnormen der Faktormatrizen gleicht, ist die Hauptnorm trivialerweise eine Funktion von der Art, wie sie oben zur Erläuterung der Allgemeinheit des Dieudonnéschen Determinantenbegriffs diente.

a) Study gelingt im Falle der Quaternionen eine Darstellung der Hauptnorm (Nablafunktion) als Polynom in den Elementen der Matrix und deren Konjugierten, während im allgemeinen Falle nur eine Darstellung als Polynom in den Koordinaten der Matrixelemente möglich erscheint. Mit Hilfe der in § 5 zusammengestellten Formeln und Gradsätze kann aber das Resultat Studys, wenn seine kombinatorischen Überlegungen noch zweckmäßig formalisiert werden, auf beliebige Algebren vom Hauptrang 2, wenigstens bei von 2 verschiedener Charakteristik des Grundkörpers, übertragen werden[7]). Damit läßt sich dann als Charakteristikum für den Hauptrang 2 (bei von 2 verschiedener Charakteristik des Grundkörpers) zeigen, daß sich die Hauptnorm nicht ändert, wenn die betreffende Matrix transponiert wird und deren Elemente durch ihre Konjungierten ersetzt werden. Daß einfaches Transponieren einer Matrix ihre Hauptnorm ändern kann, zeigen schon einfachste Beispiele über dem Quaternionenkörper.

b) Eine Ausdehnung der Determinantentheorie nach dem Muster des § 1 auf nichtassoziative Algebren erscheint aussichtslos, denn schon über dem Cayleykörper wird $A^2A \neq AA^2$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & e_0 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$, wo die Elemente der Basis 1, $e_0, e_1, \ldots, e_6$ sich gemäß der Regel $e_i e_{i+1} = e_{i+3} = -e_{i+1}e_i$ multiplizieren, in der die drei Indizes zyklisch vertauscht werden dürfen und modulo 7 zu reduzieren sind.

§ 1. Die Hauptnorm als Verallgemeinerung der Determinante.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit Einselement e und endlichem Rang n über ihrem kommutativen Grundkörper $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{A}_m$ sei die $\mathfrak{K}$-Algebra aller m-reihigen quadratischen Matrizen A mit Elementen aus $\mathfrak{A}$. Ein lineares Gleichungssystem über $\mathfrak{A}$ heiße *rechts-* oder *linksseitig* je nach dem, ob die Unbekannten sämtlich rechts oder links von ihren Koeffizienten stehen. Im folgenden ist mit einem „linearen Gleichungssystem" stets ein rechts- oder linksseitiges mit quadratischer Matrix gemeint. Das Polynom niedrigsten Grades über $\mathfrak{K}$, das $A \in \mathfrak{A}_m$ als Nullstelle besitzt, heißt wie üblich, wenn noch der höchste Koeffizient zu 1 normiert ist, das *Minimalpolynom* $\mu(t; A, \mathfrak{A}_m)$ (über $\mathfrak{K}$) von A als Element von $\mathfrak{A}_m$[8]). Den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen bildet

Lemma 1. *Ein lineares Gleichungssystem über $\mathfrak{A}$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathfrak{A}_m$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A in $\mathfrak{A}_m$ Einheit ist, und dies ist gleichwertig damit, daß das absolute Glied des Minimalpolynoms über $\mathfrak{K}$ von A als Element von $\mathfrak{A}_m$ nicht verschwindet.*

Beweis. Ist $t^s + t^{s-1} \cdot \mu_1 + \cdots + \mu_s$ das Minimalpolynom von $A \in \mathfrak{A}_m$, so wird $E\mu_s = A\widetilde{A} = \widetilde{A}A$ für $\widetilde{A} = -(A^{s-1} + A^{s-2}\mu_1 + \cdots + E\mu_{s-1})$, so daß A Null-

[7]) Siehe meine Inauguraldissertation: Die Hauptnorm als Ausdehnung des Determinantenbegriffs auf Algebren endlichen Ranges, Bonn 1951.

[8]) Der Zusatz „als Element von $\mathfrak{A}_m$" ist notwendig, denn z. B. ist A^0 für ein A aus einem direkten Summanden von $\mathfrak{A}_m$ dem Einselement dieses Summanden oder dem von $\mathfrak{A}_m$ gleichzusetzen je nach dem, ob A als Element jenes Summanden oder als Element von $\mathfrak{A}_m$ betrachtet werden soll.

teiler und damit Nichteinheit, wenn $\mu_s = 0$, während sonst $\tilde{A}\,\mu_s^{-1} = A^{-1}$ wird. Ist A keine Einheit, also $A\tilde{A} = \tilde{A}A = 0$, und besitzt ein Gleichungssystem mit der Matrix A überhaupt eine Lösung, so ist die Summe dieser Lösung mit einer nicht verschwindenden Spalte bzw. Zeile von $\tilde{A}$ eine weitere Lösung, während für ein invertierbares A die Multiplikation des Gleichungssystems mit A^{-1} eine eindeutige Lösung liefert.

Das absolute Glied des Minimalpolynoms von A entscheidet also in der gleichen Weise über die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit der Matrix A, wie die Determinante von A im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, besitzt aber dieser gegenüber den Nachteil, daß sie sich nicht als rationale Funktion der Elemente von A oder wenigstens von deren Koordinaten bezüglich einer Basis von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ darstellen läßt[9]). Daher werde jetzt eine *allgemeine Matrix* U über $\mathfrak{A}$ betrachtet, deren Elemente $u_{ij}(i, j = 1, \ldots, m)$ also bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ Unbestimmte $v_{ij1}, \ldots, v_{ijn}$ als Koordinaten besitzen, so daß $U = \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m} = \mathfrak{A}_{m,\mathfrak{Q}}$, wo die $\mathfrak{Q}$-Algebra $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$ (bzw. $\mathfrak{A}_{m,\mathfrak{Q}}$) in bekannter Weise aus $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{A}_m$) durch Erweiterung des Grundkörpers $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}(v_{111}, \ldots, v_{11n}, v_{121}, \ldots, v_{12n}, \ldots, v_{mm1}, \ldots, v_{mmn})$ entsteht. Über das Minimalpolynom

$$(1) \qquad \pi(t; U) = \pi(t; U, \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m}) = t^l - t^{l-1}\cdot\pi_1(U) + - \cdots + (-1)^l\cdot\pi_l(U)$$

über $\mathfrak{Q}$ von U[10]) finden sich bei N. Jacobson[11]) (wenn dort $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_m$ ersetzt wird) folgende Bemerkungen:

(I) Die Koeffizienten des Minimalpolynoms von U sind Polynome über $\mathfrak{R}$ in den Unbestimmten $v_{ij\nu}$: $\pi_\lambda(U) = \pi_\lambda(v_{111}, \ldots, v_{mmn})$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$, die für die bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ genommenen Koordinaten $\alpha_{ij\nu}$ der Elemente einer Matrix $A = \mathfrak{A}_m$ Werte $\pi_\lambda(\alpha_{111}, \ldots, \alpha_{mmn}) = \pi_\lambda(A)$ liefern, die unabhängig sind von der zugrunde gelegten Basis, bezüglich deren U mittels unbestimmten Koordinaten gebildet und bezüglich deren dann auch die Koordinaten der Elemente von A bestimmt wurden. Das nur von A abhängende Polynom $\pi(t; A) = t^l - t^{l-1}\cdot\pi_1(A) + - \cdots + (-1)^l\cdot\pi_l(A)$, dessen Grad l also nur von $\mathfrak{A}_m$ abhängt, heißt das *Hauptpolynom* (principal polynomial) von A, und speziell $\pi_1(A) = T(A)$ und $\pi_l(A) = N(A)$ heißen beziehentlich *Hauptspur* und *Hauptnorm* von A, und entsprechend werden diese Bezeichnungen auch bezüglich der allgemeinen Matrix U an Stelle der Matrix A verwandt, und es wird von $\pi(t; U)$, $T(U)$ und $N(U)$ mitunter auch als von dem Hauptpolynom, der Hauptspur und der Hauptnorm von $\mathfrak{A}_m$ gesprochen.

(II) Das Minimalpolynom $\mu(t; A, \mathfrak{A}_m)$ ist Teiler des Hauptpolynoms $\pi(t; A)$ und es besitzen beide Polynome über $\mathfrak{R}$ die gleichen irreduziblen Faktoren.

[9]) Dem entspricht es, daß die Determinante im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ nicht immer das absolute Glied des Minimalpolynoms liefert: $t - 2$ ist das Minimalpolynom der Matrix $2E$ über dem Körper der rationalen Zahlen.

[10]) Hier ist der Zusatz „als Element von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q},m}$" überflüssig, weil U als allgemeine Matrix zu einer bestimmten Basis und damit auch zu einer bestimmten Algebra gehört.

[11]) Ins Einzelne gehende Beweise finden sich in jedem Falle in meiner Inauguraldissertation.

Wird jetzt noch

$$\left(U^{l-1} - U^{l-2} \cdot \pi_1(U) + - \cdots + (-1)^{l-1} E \cdot \pi_{l-1}(U)\right) \cdot (-1)^{l+1} = \overline{U}$$

und das entsprechend definierte $\overline{A}$ *Hauptadjungierte* von U bzw. von A genannt, so folgt aus Lemma 1 und (II) sofort

Theorem 1. *Die Matrix A ist in $\mathfrak{A}_m$ Einheit, genau wenn ihre Hauptnorm $N(A)$ nicht verschwindet, und es ist $N(U) \cdot E = U\overline{U} = \overline{U}U$, wenn E die Einheitsmatrix von $\mathfrak{A}_m$ bedeutet.*

Die Formel in diesem Theorem entspricht dem *Laplaceschen Entwicklungssatz*: Die Multiplikation der i-ten Zeile von $U(\overline{U})$ mit der j-ten Spalte von $\overline{U}(U)$ liefert 0 für $i \neq j$ und sonst $N(U)$ als Linearkombination der Elemente der i-ten Zeile (Spalte) von U. Die Multiplikation von links des linearen Gleichungssystems

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ mit } \overline{A} \text{ liefert die Formel } N(A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \overline{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

die für $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}$, wo $\pi(t;A) = |E\,t - A|$, also $N(A) = |A|$ und damit $\overline{A}$ die zu A adjungierte Matrix wird, in eine gebräuchliche Formulierung der *Cramerschen Regel* übergeht. Die entsprechende Formel für linksseitige Gleichungssysteme liegt auf der Hand[12]).

§ 2. Die Hauptnorm als ausgezeichnete Verallgemeinerung der Determinante.

Ist R eine treue, d.h. eineindeutige, Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$, so ist die Abbildung von $\mathfrak{A}_\Omega$ auf Matrizen über Ω, die dem Element $\sum_\nu \beta_\nu e_\nu$ die Matrix $\sum_\nu \beta_\nu \cdot Re_\nu$ zuordnet, ersichtlich eine treue Darstellung von $\mathfrak{A}_\Omega$ über Ω, die wieder mit R bezeichnet werden kann, weil sie, wie leicht nachzurechnen, von der Basis $e_1, \ldots, e_n$ unabhängig ist. Durch

$$R \cdot \begin{pmatrix} b_{11}, & \ldots, b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1}, \ldots, & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rb_{11}, & \ldots, Rb_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ Rb_{m1}, \ldots, & Rb_{mm} \end{pmatrix}, \quad b_{ij} \in \mathfrak{A}_\Omega,$$

wird R dann weiter zu einer treuen Darstellung von $\mathfrak{A}_{\Omega,m}$ über Ω vom Grade mr fortgesetzt, wenn R als Darstellung von $\mathfrak{A}$ den Grad r besitzt. Nach Jacobson ergibt sich dann:

(III) Das Minimalpolynom $\pi(t;U)$ der allgemeinen Matrix $U \in \mathfrak{A}_{\Omega,m}$ ist in $\Omega[t]$ letzter invarianter Faktor (höchster Elementarteiler) der charakteristischen Matrix $t \cdot RE - RU$, wenn R eine treue, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildende Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$ ist. Die Determinante $|t \cdot RE - RU|$ und ihr Teiler $\pi(t;U)$ in $\Omega[t]$ besitzen also in $\Omega[t]$ beide die gleichen irreduziblen Faktoren.

[12]) Es gilt aber natürlich i. a. nicht $x_i = N(A_i)/N(A) \in \mathfrak{K}$, wo A_i aus A durch Ersetzung der i-ten Spalte durch die $a_1, \ldots, a_m$ entsteht.

$\pi(t;U)$ ergibt sich also aus $|t\cdot RE-RU|$ bei Division durch den größten gemeinsamen Teiler (gr. g. T.) in $\mathfrak{Q}[t]$ aller $(m\,r-1)$-reihigen Unterdeterminanten, dessen höchster Koeffizient bezüglich t gleich 1 ist. In einer analogen Beziehung stehen $N(U)$ und $|RU|$ als Polynome aus $\mathfrak{P}=\mathfrak{R}[v_{111},\ldots,v_{m\,m\,n}]$ zueinander:

Theorem 2. *Ist R eine treue das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildende Darstellung von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$, so ist die Hauptnorm $N(U)$ in $\mathfrak{P}$ Teiler der „R-Norm" $|RU|$, und zwar ist $|RU|$ $N(U)$ gr. g. T. in $\mathfrak{P}$ aller $(m\,r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von RU und $N(E)=1$.*

Beweis. Es genügt den Beweis für $m=1$ zu führen, weil in ihm die Eigenschaft von $\mathfrak{A}_m$ eine Matrixalgebra zu sein nicht benötigt wird. Für ein allgemeines Element $u=\sum_\nu v_\nu e_\nu$ der Algebra $\mathfrak{A}$ und deren Einselement $e=\sum_\nu \varepsilon_\nu e_\nu$ existiert nach (III) eine Gleichung

$$|t\cdot Re-Ru|=\delta(t,v_1,\ldots,v_n)\cdot\pi(t;u), \tag{2}$$

wo δ gr. g. T. in $\mathfrak{Q}[t]=\mathfrak{R}(v_1,\ldots,v_n)[t]$ aller $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t\cdot Re-Ru$ und nach dem Gaußschen Theorem[13]) ein Polynom aus $\mathfrak{P}[t]=\mathfrak{R}[v_1,\ldots,v_n,t]$ ist. Bei der Substitution $t\to 0$, $v_\nu\to -v_\nu$, geht (2) über in

$$|Ru|=\delta(0,-v_1,\ldots,-v_n)\cdot\pi_l(v_1,\ldots,v_n), \tag{3}$$

wenn außer (1) noch beachtet wird, daß $\pi(t;u)$ als Teiler von $|t\cdot Re-Ru|=|\sum(t\varepsilon_\nu-v_\nu)\cdot Re_\nu|$ in allen Unbestimmten $v_1,\ldots,v_n,t$ homogen ist. Nun ist δ auch in $\mathfrak{P}[t]$ gr. g. T. aller $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t\cdot Re-Ru$, denn wird dieser mit $\tilde{\delta}(t,v_1,\ldots,v_n)$ bezeichnet, wenn noch sein höchster Koeffizient bezüglich t zu 1 normiert ist — das ist möglich, weil $\tilde{\delta}$ nach dem Determinantenentwicklungssatz auch $|t\cdot Re-Ru|$ selbst in $\mathfrak{P}[t]$ teilt —, so ergibt sich, da der höchste Koeffizient bezüglich t von δ nach (2) gleich 1 ist und daher δ nach dem Gaußschen Theorem die genannten Unterdeterminanten schon in $\mathfrak{P}[t]$ teilt, $\tilde{\delta}\equiv 0(\delta)$ in $\mathfrak{P}[t]\subseteq\mathfrak{Q}[t]$, während $\delta\equiv 0(\tilde{\delta})$ in $\mathfrak{Q}[t]$ trivial ist, so daß δ und $\tilde{\delta}$ sich nur um einen Faktor aus $\mathfrak{Q}$ unterscheiden, der aber wegen (2) gleich 1 sein muß. Weiter besitzen die $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $t\cdot Re-Ru=\sum_\nu(t\varepsilon_\nu-v_\nu)\cdot Re_\nu$ alle die Gestalt $|\sum_\nu(t\varepsilon_\nu-v_\nu)\cdot A_\nu|$, wo die A_ν $(r-1)$-reihige Untermatrizen der Re_ν und dann also die $|\sum_\nu v_\nu A_\nu|$ die entsprechenden Unterdeterminanten von $|\sum_\nu v_\nu\cdot Re_\nu|=|Ru|$ sind. Damit ergibt sich bei der zur Herleitung von (3) benutzten Substitution $\delta(0,-v_1,\ldots,-v_n)$ als gemeinsamer Faktor in $\mathfrak{P}$ der $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von Ru und damit als Teiler in $\mathfrak{P}$ von deren gr. g. T. $\delta'(v_1,\ldots,v_n)$ in $\mathfrak{P}$. Andererseits liefert die Substitution $v_\nu\to t\,\varepsilon_\nu-v_\nu$ in entsprechender Weise $\delta(t,v_1,\ldots,v_n)\equiv 0\big(\delta'(t\,\varepsilon_1-v_1,\ldots,t\,\varepsilon_n-v_n)\big)$ in $\mathfrak{P}[t]$, was bei der Substitution $t\to 0$, $v_\nu\to -v_\nu$ in $\delta(0,-v_1,\ldots,-v_n)\equiv 0\big(\delta'(v_1,\ldots,v_n)\big)$ in $\mathfrak{P}$ übergeht. Schließlich ergibt sich noch $N(e)=1$ aus der Bemerkung, daß $\pi(t;e)$ nach (II) eine Potenz des Minimalpolynoms $t-1$ von $e\in\mathfrak{A}$ sein muß.

[13]) Vgl. van der Waerden, Moderne Algebra I, § 23. Berlin 1937.

Hieran schließt sich zwanglos Theorem 3, das sich stützt auf

Lemma 2. *Ist $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ ein Polynom über $\mathfrak{K}$ in den Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$, so sind die Teiler in $\mathfrak{K}[v_1, \ldots, v_n\, t]$ von $\varphi(t\,\alpha_1 - \beta_1 v_1, \ldots, t\,\alpha_n - \beta_n v_n)$, wo $\Pi_\nu \beta_\nu \neq 0$, auch wieder Polynome über $\mathfrak{K}$ in den $t\,\alpha_\nu - \beta_\nu v_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$.*

Beweis. Wird eine Primfaktorzerlegung in $\mathfrak{K}[v_1, \ldots, v_n, t]$ von $\varphi(t\alpha_1 - \beta_1 v_1, \ldots, t\,\alpha_n - \beta_n v_n)$, der Substitution $t \to 0$, $v_\nu \to -\beta_\nu^{-1}(t\,\alpha_\nu - \beta_\nu v_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ unterworfen, die das Polynom selbst reproduziert, so entsteht wieder eine Primfaktorzerlegung, denn zunächst kann bei der Substitution höchstens eine Graderniedrigung der einzelnen Faktoren eintreten, d.h. aber der Grad der einzelnen Faktoren bleibt erhalten, so daß insbesondere kein Faktor in ein Polynom 0-ten Grades übergeht, also aus der Zerlegung verschwindet, und daher dann die Reduzibilität eines Faktors in der neuen Zerlegung die Existenz zweier Primfaktorzerlegungen desselben Polynoms mit verschieden vielen Primfaktoren bedeuten würde.

Theorem 3. *Das Hauptpolynom $\pi(t; U)$ entsteht aus der Hauptnorm $N(U)$ durch die Substitution $v_{ij\nu} \to t\,\delta_{ij}\varepsilon_\nu - v_{ij\nu}$:*

$$\pi(t; U) = \pi_l(t\,\delta_{11}\,\varepsilon_1 - v_{111}, \ldots, t\,\delta_{mm}\,\varepsilon_n - v_{mmn}),$$

wo $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$, während die ε_ν und die Unbestimmten $v_{ij\nu}$ die Koordinaten des Einselementes von $\mathfrak{A}$ und der Elemente von U bezüglich derselben Basis $e_1, \ldots, e_n$ sind.

Beweis. Sind die e_{ij} die Matrixeinheiten, so daß die $e_{ij}e_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{A}_m$ über $\mathfrak{K}$ bilden, so sind die $\delta_{ij}\varepsilon_\nu$ bzw. die $v_{ij\nu}$ die Koordinaten der Einheitsmatrix $E \in \mathfrak{A}_m$ bzw. der allgemeinen Matrix U bezüglich dieser Basis. Es genügt daher wieder, den Beweis für $m = 1$ zu führen. Wegen $|t \cdot Re - Ru| = |\sum_\nu (t\,\varepsilon_\nu - v_\nu) \cdot Re_\nu|$ und (2) existiert nach Lemma 2 über $\mathfrak{K}$ ein Polynom $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ mit $\pi(t; u) = \varphi(t\,\varepsilon_1 - v_1, \ldots, t\,\varepsilon_n - v_n)$, was nach (1) unter Beachtung der schon erwähnten Homogenitätseigenschaft von $\pi(t; u)$ durch die Substitution $t \to 0$, $v_\nu \to -v_\nu$ in $N(u) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ übergeht.

Nach (1) und den Theoremen 1 und 3 können also die drei Größen $\pi(t; U)$, $N(U)$ und $\overline{U}$ aus jeder von ihnen berechnet werden. — Auf Grund von Theorem 2 besitzt $N(U)$ eine wichtige Minimaleigenschaft:

Theorem 4. *Existiert zu einem nicht verschwindenden Polynom $\varphi(v_{111}, \ldots, v_{mmn}) \in \mathfrak{P} = \mathfrak{K}[v_{111}, \ldots, v_{mmn}]$ eine Matrix V aus dem Ring $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}, m}$ aller Matrizen aus $\mathfrak{A}_{\Omega, m}$, deren Elemente bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ (und damit bezüglich jeder Basis von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$) Polynome aus $\mathfrak{P}$ als Koordinaten besitzen, derart, daß*

$$\text{stets } \varphi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{gilt, falls} \quad U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \text{oder daß}$$

stets $(x_1, \ldots, x_m) \cdot \varphi = (a_1, \ldots, a_m) \cdot V$ gilt, falls $(x_1, \ldots, x_m) \cdot U = (a_1, \ldots, a_m)$, so ist $N(U)$ in $\mathfrak{P}$ Teiler von φ und $V = \overline{U} \cdot (\varphi/N(U))$. — Da insbesondere $N(U)$ selbst mit $V = \overline{U}$ die Voraussetzungen erfüllt (s. (I)), *ist $N(U)$ das Polynom*

niedrigsten Grades hinsichtlich der von φ geforderten Eigenschaften mit der Normierung $N(E)=1$ (s. Theorem 2).

Beweis. Nach Theorem 1 ist $U\overline{U}=N(U)\cdot E=\overline{U}U$. Die erste bzw. zweite Gleichung enthält für jede Spalte bzw. Zeile von $\overline{U}$ ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix U, so daß sich nach Voraussetzung in jedem Falle $\varphi\overline{U}=V\cdot N(U)$ ergibt, also die zweite Behauptung. Die Anwendung einer treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung R von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$ liefert $\varphi\cdot R\overline{U}=N(U)\cdot RV$, wo $R\overline{U}$ und RV, wegen $\overline{U}$, $V\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{P},m}$, nur aus Polynomen aus $\mathfrak{P}$ bestehen, so daß die erste Behauptung folgt, wenn die Elemente von $R\overline{U}$ in $\mathfrak{P}$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. In der Tat, es liefert Theorem 1 $RU\cdot R\overline{U}=N(U)\cdot RE$, also, da $\overline{RU}$ nach § 1 die zu RU adjungierte Matrix bedeutet, wegen $(RU)^{-1}=\overline{RU}\,|RU|\colon RU\overline{U}=\overline{RU}\,(|RU|\,N(U))$, und es ist $|RU|\,N(U)$ nach Theorem 2 größter gemeinsamer Teiler der Elemente von $\overline{RU}$.

Die Hauptnorm stellt also hinsichtlich der linearen Gleichungstheorie in Algebren endlichen Ranges mit Einselement nicht nur, wie in § 1 gezeigt, einen Ersatz der Determinante dar, sondern sie zeichnet sich nach Theorem 4 auch unter allen Funktionen φ, die gegebenenfalls noch als Ersatz in Betracht kommen könnten, durch ihren minimalen Grad aus.

§ 3. Ein Hilfssatz über irreduzible Darstellungen.

Es sei $\overline{\mathfrak{K}}$ die algebraische Abschließung von $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{P}}=\overline{\mathfrak{K}}[v_{111},\ldots,v_{mmn}]$, $\overline{\Sigma}$ der Quotientenkörper von $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}}}$ die aus $\mathfrak{A}$ durch Erweiterung von $\mathfrak{K}$ zu $\overline{\mathfrak{K}}$ entstehende $\overline{\mathfrak{K}}$-Algebra. $R_{m1},\ldots,R_{ms}$ sei ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}},m}$ über $\overline{\mathfrak{K}}$. Dann lassen sich aus Jacobson ohne besondere Mühe die folgenden, zur Berechnung des Hauptpolynoms von $\mathfrak{A}_m$ wichtigen, Hinweise entnehmen:

(IV) Die $R_{m\sigma}(\sigma=1,\ldots,s)$ sind bis auf Isomorphie in jeder voll ausreduzierten, treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}},m}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}},m}$ über $\overline{\mathfrak{K}}$ als irreduzible Bestandteile (Diagonaldarstellungen) vertreten und bilden $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}},m}$ auf volle Matrizenringe, insbesondere also das Einselement von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{K}},m}$ auf Einheitsmatrizen ab.

(V) Es existiert in $\overline{\mathfrak{P}}[t]$ eine Primfaktorzerlegung von $\pi(t;U)$ der Gestalt $\Pi_{\sigma=1,\ldots,s}|t\cdot R_{m\sigma}E-R_{m\sigma}U|^{k_{m\sigma}}\,(k_{m\sigma}>0)$[14]).

[14]) Zur Erlangung dieses Resultats ist, außer der trivialerweise vorzunehmenden Ersetzung von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_m$, in den Ausführungen von Jacobson bei Zugrundelegung der im Beweis von Theorem 2 eingeführten Bezeichnungen noch zu beachten, daß für zwei, das Einselement von $\mathfrak{A}$ auf Einheitsmatrizen abbildende irreduzible Darstellungen R_1, R_2 einer Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{K}$ genau dann $|t\cdot R_1e-R_1u|=|t\cdot R_2e-R_2u|$ gilt, wenn R_1 und R_2 äquivalent sind, was eine triviale Folge der entsprechenden Behauptung für die Determinanten $|R_1u|$ und $|R_2u|$ ist, die sich in van der Waerden, Moderne Algebra II, S. 184, Berlin 1932, als Übungsaufgabe befindet, und daß die Irreduzibilität von $|t\cdot R_{m\sigma}E-R_{m\sigma}U|$ in $\overline{\Sigma}[t]$ natürlich die in $\overline{\mathfrak{P}}[t]$ nach sich zieht, weil der höchste Koeffizient dieses Polynoms bezüglich t gleich 1 ist.

In dieser Primfaktorzerlegung stört die unbekannte Abhängigkeit von m bei den Darstellungen und den Multiplizitäten. Daher interessiert das folgende

Lemma 3. *Bilden die $R_1, \ldots, R_s$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$, so bilden ihre gemäß § 2 definierten Fortsetzungen auf $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ wieder ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen.*

Beweis. Da die $R_\sigma (\sigma = 1, \ldots, s)$ nach (IV) auf volle Matrizenringe abbilden, tun dies auch ihre Fortsetzungen auf $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$, die somit ebenfalls irreduzibel sind. Diese Fortsetzungen sind aber auch wieder paarweise inäquivalent, denn die Äquivalenz der Fortsetzungen von R_1 und R_2 impliziert $|t \cdot R_1 E - R_1 U| = |t \cdot R_2 E - R_2 U|$ und $r_1 = r_2 = r$ für die Grade r_1, r_2 von R_1, R_2, so daß, wenn alle Elemente von U bis auf $u_{11} = u = \sum_\nu v_\nu e_\nu$ durch 0 ersetzt werden,

$$t^{(m-1)r} |t \cdot R_1 e - R_1 u| = t^{(m-1)r} |t \cdot R_2 e - R_2 u|$$

und damit $|R_1 u| = |R_2 u|$ folgt, was wegen der Irreduzibilität von R_1 und R_2 nur möglich ist, wenn R_1 und R_2 äquivalent sind[15]). Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß unter den Fortsetzungen der R_σ jede nicht verschwindende irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$ bis auf Äquivalenz vertreten ist. Da äquivalente Darstellungen äquivalente Fortsetzungen haben[16]) und die R_σ ein vollständiges System nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen bilden, genügt es dazu aber wegen (IV), die Fortsetzung auf $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}},m}$ einer vollausreduzierten treuen, das Einselement von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ auf die Einheitsmatrix abbildenden Darstellung R von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$ mit den irreduziblen Bestandteilen $R'_1, \ldots, R'_k$ so auszureduzieren, daß die so entstehende Darstellung als irreduzible Bestandteile nur die Fortsetzungen der $R'_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$ enthält. Das ist aber ohne weiteres möglich, denn die Zuordnung

$$R(a_{ij}) = \left(\begin{pmatrix} R'_1 a_{ij} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R'_k a_{ij} \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} R'_1 (a_{ij}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R'_k (a_{ij}) \end{pmatrix}$$

wird ersichtlich dadurch bewirkt, daß Zeilen und Spalten ein und derselben Permutation unterworfen werden, und es sind die Diagonaldarstellungen rechts ersichtlich irreduzibel, weil die $R'_\varkappa$ nach (IV) schon $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ auf volle Matrizenringe abbilden.

Auf Grund von Lemma 3 können jetzt also in (V) die $R_{m\sigma}$ durch die $R_{1\sigma} = R_\sigma$ ersetzt werden.

§ 4. Die Primfaktorzerlegung des Hauptpolynoms von $\mathfrak{A}_m$.

Daß in (V) $k_{m\sigma} = k_{1\sigma}$, behauptet

Theorem 5. *Ist $R_1, \ldots, R_s$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter nicht verschwindender irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}_{\overline{\mathfrak{R}}}$ über $\overline{\mathfrak{R}}$, so*

[15]) Vgl. die Anmerkung zu (V).

[16]) Aus $R_1 a = P \cdot R_2 a \cdot P^{-1}$, für alle a, folgt $R_1 (a_{ij}) = \begin{pmatrix} P & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P \end{pmatrix} \cdot R_2 (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} P^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P^{-1} \end{pmatrix}$.

existiert in $\overline{\mathfrak{P}}[t]$ *eine Primfaktorzerlegung*

$$\pi(t;U) = \Pi_{\sigma=1,\ldots,s} |t \cdot R_\sigma E - R_\sigma U|^{k_\sigma} \qquad (k_\sigma > 0),$$

in der die k_σ *vom Grade* m *der Matrix* U *unabhängig sind und es ist dann* $\Pi_{\sigma=1,\ldots,s} |R_\sigma U|^{k_\sigma}$ *eine Primfaktorzerlegung in* $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{R}}[v_{111}, \ldots, v_{mmn}]$ *von* $N(U)$.

Beweis. Nach (V) und Lemma 3 gilt

$$\pi(t;U) = \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E - R_\sigma U|^{k_{m\sigma}} \qquad (k_{m\sigma} > 0), \tag{4}$$

so daß wegen (1) und $l = \sum_\sigma m r_\sigma k_{m\sigma}$, wo r_σ den Grad der Darstellung R_σ bedeutet,

$$N(U) = \Pi_\sigma |R_\sigma U|^{k_{m\sigma}}, \tag{5}$$

wo die Reduzibilität einer der in den v_{ijv} homogenen Determinanten $|R_\sigma U|$ wegen Theorem 3 eine Zerlegung von $\pi(t;U)$ in mehr als $\sum_\sigma k_{m\sigma}$ Faktorpolynome positiven Grades ermöglichen würde. Daher braucht nur noch der erste Teil des Theorems bewiesen zu werden. Für die sich als Schnitt der m' ersten Zeilen und Spalten von U ergebende Untermatrix U' von U und die Einheitsmatrix E' von $\mathfrak{A}_{m'}$ folgt aus (4)

$$\pi\left(t; \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = t^{(m-m')\sum_\sigma r_\sigma k_{m\sigma}} \cdot \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}.$$

Da dieses Polynom in t über $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}(v_{111}, \ldots, v_{m'm'n})$ die Nullstelle $\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt und also auch für die Matrix $U' \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}', m'}$ verschwindet, die wegen $N(U') \neq 0$ nach Theorem 1 invertierbar ist, besitzt schon das Polynom $\Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}$ die Nullstelle U' und ist damit durch das Minimalpolynom $\pi(t;U') = \Pi_\sigma |t \cdot R_\sigma E' - R_\sigma U'|^{k_{m'\sigma}}$ von U' teilbar, was $k_{m'\sigma} \leqq k_{m\sigma}$ bedeutet. $k_{m'\sigma} = k_{m\sigma}$ ist daher wegen $r_\sigma > 0$ gleichbedeutend mit $\sum_\sigma r_\sigma (k_{m'\sigma} - k_{m\sigma}) = 0$. Da nach (5) $l' = m' \sum_\sigma r_\sigma k_{m'\sigma}$ der Grad von $N(U')$ ($|R_\sigma U'|$ ist eine nicht verschwindende Determinante, deren Elemente Linearformen in den $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ sind), ist damit der Beweis zurückgeführt auf

Lemma 4. *Für den Grad* g' *von* $N(U)$ *bezüglich der unbestimmten Koordinaten* $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ *der Elemente der Untermatrix* U' *von* U *und den Grad* l' *von* $N(U')$ *gilt* $l' = g' = m' \sum_\sigma r_\sigma k_{m\sigma}$.

Beweis. Da schon $k_{m'\sigma} \leqq k_{m\sigma}$ bewiesen wurde, braucht nur noch die zweite Gleichung und $l' \geqq g'$ bewiesen zu werden. Zum Beweise der zweiten Gleichung ist nur zu beachten, daß nach (5) sicher $g' \leqq \sum_\sigma m' r_\sigma k_{m\sigma}$ ($|R_\sigma U|$ ist in den $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ höchstens vom Grade $m' r_\sigma$, weil diese Unbestimmten nur im Schnitt der ersten $m' r_\sigma$ Spalten und Zeilen von $R_\sigma U$ auftreten) und daß aus (5) durch Spezialisierung das Polynom $N\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & E'' \end{pmatrix} = \Pi_\sigma |R_\sigma U'|^{k_{m\sigma}}$ (E'' Einheitsmatrix von $\mathfrak{A}_{(m-m')}$) entsteht, dessen Grad $\sum_\sigma m' r_\sigma k_{m\sigma}$ (vgl. die Lemma 4 voraufgehende Bemerkung zur Bestimmung von l') somit nicht größer als g' sein kann. Die Ungleichung $l' \geqq g'$ ist bewiesen, wenn es gelingt, ein die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllendes Polynom φ anzugeben,

das bezüglich der in U' vorkommenden Unbestimmten $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ höchstens den Grad l' besitzt, denn nach Theorem 4 ist φ dann Vielfaches von $N(U)$. Um ein solches φ zu finden, ist $U\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ einem geeigneten Eliminationsprozeß zu unterwerfen. Zu diesem Zweck werde das Gleichungssystem in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U' & V' \\ V'' & U'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \tag{6}$$

geschrieben, wo die einfach gestrichenen Matrizen und Spalten m'-, die zweifach gestrichenen $m'' = (m - m')$-zeilig sind, und im folgenden die für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten übliche Ausdrucksweise verwandt. Zur Elimination von X'' wird die zweite Gleichung von links mit $\overline{U''}$ multipliziert und das Ergebnis

$$N(U'') \cdot X'' = \overline{U''} A'' - \overline{U''} V'' X' \tag{7}$$

in die mit $N(U'')$ multiplizierte erste Gleichung eingesetzt:

$$\left(N(U'') \cdot U' - V' \overline{U''} V''\right) X' = W' X' = N(U'') \cdot A' - V' \overline{U''} A'', \tag{8}$$

wo W' nur zur Abkürzung des Koeffizienten von X' eingeführt wurde. Linksseitige Multiplikation von (8) mit $\overline{W'}$ liefert die Auflösung nach X':

$$N(W') \cdot X' = \left(N(U'') \cdot \overline{W'}, -\overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \tag{9}$$

was in die mit $N(W')$ multiplizierte Gl. (7) eingesetzt die Auflösung nach X'' ergibt:

$$\begin{aligned} N(W') \cdot N(U'') \cdot X'' &= N(W') \cdot \overline{U''} A'' - \overline{U''} V'' \cdot \left(N(U'') \cdot \overline{W'}, -\overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \\ &= \left(-N(U'') \cdot \overline{U''} V'' \overline{W'}, N(W') \cdot \overline{U''} + \overline{U''} V'' \overline{W'} V' \overline{U''}\right)\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wird hier noch die mit $N(U'')$ multiplizierte Gl. (9) hinzugefügt, so ergibt sich die Auflösung von (6) in der Gestalt

$$\left\{ \begin{aligned} &N(W') \cdot N(U'') \cdot \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} N(U'') \cdot N(U'') \cdot \overline{W'}, & -N(U'') \cdot \overline{W'} V' \overline{U''} \\ -N(U'') \cdot \overline{U''} V'' \overline{W'}, & N(W') \cdot \overline{U''} + \overline{U''} V'' \overline{W'} V' \overline{U''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Da, wie schon in Theorem 4 festgestellt, eine Hauptnorm und die bezüglich einer Basis über $\mathfrak{R}$ gebildeten Koordinaten der Elemente einer Hauptadjungierten Polynome über $\mathfrak{R}$ in den Koordinaten der Elemente der betreffenden Matrix sind, ist sofort zu sehen, daß $N(W') \cdot N(U'')$ als φ und die in (10)

rechtsstehende „zweireihige" Matrix als U' die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllen. Zur Vollendung des Beweises ist also nur noch zu zeigen, daß q bezüglich der in U' vorkommenden Unbestimmten höchstens vom Grade l' ist. Da $N(U'')$ diese Unbestimmten nicht enthält, braucht dies nur für $N(W'')$ gezeigt zu werden. Nach (8) besitzt W'' die Gestalt $\gamma U' + C$, wo γ ein Polynom über $\mathfrak{R}$ vom Grade 0 in den $v_{111}, \ldots, v_{m'm'n}$ und C eine m'-reihige Matrix über $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ ist, in der ebenfalls keine Unbestimmten aus U' vorkommen. Daher ergibt sich aus der gemäß (5) unter Beachtung von $|A + B| = |A| + \cdots + |B|$ gebildeten Formel

$$N(\gamma U' + C) = \Pi_\sigma |\gamma \cdot R_\sigma U' + R_\sigma C|^{k m' \sigma} = \Pi_\sigma (\gamma^{m' r_\sigma} |R_\sigma U'| + \cdots + |R_\sigma C|)^{k m' \sigma}$$

$$= \gamma^{l'} \Pi_\sigma |R_\sigma U'|^{k m' \sigma} + \cdots + \Pi_\sigma |R_\sigma C|^{k m' \sigma} = \gamma^{l'} \cdot N(U') + \cdots + N(C)$$

schon bei oberflächlicher Abschätzung der Grad von $N(W'')$ bezüglich der Unbestimmten aus U'' in der Tat als höchstens gleich dem von $N(U')$, was noch zu beweisen war.

§ 5. Gradsätze und Rechenregeln für Hauptnormen, Hauptadjungierte und Hauptspuren.

Dieser Paragraph stellt lediglich eine Ausschöpfung von Theorem 5 dar.

Theorem 6. 1. *Für den gemeinsamen Grad l von $\pi(t; U)$ und $N(U)$, und den Grad h von $\pi(t; u)$ und $N(u)$, den sog. „Hauptrang" von $\mathfrak{A}$, gilt $l = m h$.*

2. *Bei Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen von $A \in \mathfrak{A}_m$ multipliziert sich $N(A)$ mit dem Faktor $(-1)^h$.*

3. *$N(A)$ verschwindet, wenn A eine Nullspalte oder Nullzeile oder zwei gleiche Spalten oder Zeilen enthält.*

4. *$N(U)$ ist in den Koordinaten bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{R}$ der Elemente m' beliebiger Spalten bzw. Zeilen von U homogen vom Grade $m' h$ und erreicht diesen Grad in bezug auf die Koordinaten der Elemente einer jeden m'-reihigen Untermatrix von U.*

Beweis. 1. Nach Theorem 5 ist $l = \sum_\sigma m r_\sigma k_\sigma$ und $h = \sum_\sigma r_\sigma k_\sigma$. 2. Eine Vertauschung zweier Spalten von A bewirkt in der Matrix $R_\sigma A$ eine Vertauschung von r_σ Spalten unter Beibehaltung ihrer gegenseitigen Lage mit r_σ anderen Spalten, die dabei ebenfalls ihre Lage zueinander nicht ändern. Daher multipliziert sich $|R_\sigma A|$ bei dieser Vertauschung mit $(-1)^{r_\sigma r_\sigma} = (-1)^{r_\sigma}$ und $N(A)$ dann zufolge Theorem 5 mit $(-1)^{\sum_\sigma r_\sigma k_\sigma} = (-1)^h$. In diesem Beweise kann überall „Spalte" durch „Zeile" ersetzt werden. 3. Gleiche oder verschwindende Spalten (Zeilen) in A bewirken gleiche oder verschwindende Spalten (Zeilen) in $R_\sigma A$. Daher wegen Theorem 5 die Behauptung. 4. Es habe U' die gleiche Bedeutung wie in § 4. Nach Theorem 5 und Lemma 4 ist $g' = m' h$. Wegen 2. ist damit der zweite Teil der Behauptung bereits bewiesen. Auch der erste Teil der Behauptung braucht wegen 2. nur für die m' ersten Spalten bzw. Zeilen bewiesen zu werden, und wegen Theorem 5 reicht es dazu aus, die $|R_\sigma U|$ bezüglich der in ihren $m' r_\sigma$ ersten Spalten bzw. Zeilen vorkommenden Unbestimmten als homogen vom Grade $m' r_\sigma$ zu erweisen.

Das ist aber trivial, weil die Behauptung für Determinanten zutrifft und die Elemente von $R_\sigma U$ Linearformen sind.

Theorem 7. *Für allgemeine Matrizen* $U, V, U_1, \ldots, U_k$ *gilt* $N(UV) = N(U) \cdot N(V)$ *und*

$$N\begin{pmatrix} U_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix} = N(U_1) \ldots N(U_k) = N\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ * & U_k \end{pmatrix}.$$

Beweis. Folgt wegen Theorem 5 sofort aus den entsprechenden Determinantensätzen.

Korollar. 1. $N(A)$ *ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte von* A *eine von rechts mit* a *multiplizierte andere Spalte oder zu einer Zeile eine von links mit* a *multiplizierte andere Zeile addiert wird.*

2. *Bei Multiplikation einer Spalte von rechts oder einer Zeile von links mit* a *multipliziert sich* $N(A)$ *mit* $N(a)$.

3. $N(E\,\alpha) = \alpha^{m\,h}$, $\alpha \in \mathfrak{K}$.

Beweis. 1. Die in 1. bzw. 2. gebildete Matrix entsteht aus A durch Multiplikation mit einer Matrix, die in der Hauptdiagonalen nur Einsen und außerhalb derselben nur ein möglicherweise von 0 verschiedenes Element a enthält, bzw. mit einer Matrix, die in der Hauptdiagonalen außer einem a nur Einsen und sonst nur Nullen enthält. 3. Nach Theorem 7 ist $N(E\,\alpha) = (N(e\,\alpha))^m$ und nach Theorem 5 wird $N(e\,\alpha) = \alpha^h$ wegen $R_\sigma \cdot e\,\alpha = R_\sigma e \cdot \alpha$, wo $R_\sigma e$ nach (IV) die r_σ-reihige Einheitsmatrix ist.

Theorem 8. *Mit den Voraussetzungen von Theorem 7 gilt:* 1. $\overline{UV} = \overline{V} \cdot \overline{U}$, 2. $N(\overline{U}) = (N(U))^{m\,h-1}$, 3. $\overline{\overline{U}} = U \cdot (N(U))^{m\,h-2}$,

4. $$\overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \cdot \Pi_{\varkappa \neq 1} N(U_\varkappa) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \cdot \Pi_{\varkappa \neq k} N(U_\varkappa) \end{pmatrix} \quad \textit{und}$$

5. $$\overline{E\,\alpha} = E\,\alpha^{m\,h-1}, \qquad \alpha \in \mathfrak{K}.$$

Beweis. 1. Folgt aus $UV \cdot \overline{U}\,\overline{V} = E \cdot N(U) \cdot N(V) = U \cdot N(V) \cdot \overline{U} = UV \cdot \overline{V}\,\overline{U}$ wegen $N(UV) = N(U)\,N(V) \neq 0$. 2. Folgt aus $N(U) \cdot N(\overline{U}) = N(U\overline{U}) = N\left(E \cdot N(U)\right)$ nach Korollar 3 von Theorem 7. 3. Mit 2. wird $\overline{U}\,\overline{\overline{U}} = E \cdot N(\overline{U}) = E \cdot (N(U))^{m\,h-1}$. Daher nach Linksmultiplikation mit U die Behauptung. 4. Folgt aus

$$\begin{pmatrix} E \cdot N(U_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E \cdot N(U_k) \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_k \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & U_k \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{U}_k \end{pmatrix} \Pi_\varkappa N(U_\varkappa).$$

5. Nach 4. und dem Korollar 3 von Theorem 7 wird

$$\overline{E\alpha} = E \cdot \overline{e\alpha}\,(N(e\alpha))^{m-1} = E \cdot \overline{e\alpha} \cdot \alpha^{(m-1)h}.$$

Aus

$$e\alpha \cdot \overline{e\alpha} = e \cdot N(e\alpha) = e\alpha^h \quad \text{folgt aber} \quad \overline{e\alpha} = e\,\alpha^{h-1}.$$

Theorem 9. *Mit den Voraussetzungen der Theoreme 7 und 8 wird:*

$$T(U) = \sum_\sigma k_\sigma \cdot T(R_\sigma U), \quad T(A\alpha) = \alpha \cdot T(A), \quad T(U+V) = T(U) + T(V),$$

$$T(UV) = T(VU), \quad T\begin{pmatrix} U_1 & * \\ & \ddots \\ * & U_k \end{pmatrix} = T(U_1) + \cdots + T(U_k), \quad T(e\alpha) = h\alpha,$$

und es hat die Transponierte einer Matrix die gleiche Hauptspur wie die Matrix selbst.

Beweis. Da $-T(U)$ der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von t in $\pi(t;U)$ ist, ergibt sich die erste Formel sofort aus Theorem 5 und alle anderen Behauptungen folgen aus ihr, weil sie für Matrizen über kommutativen Körpern bereits gelten. Bei der vorletzten ist nur wieder zu beachten, daß $R_\sigma e$ die r_σ-reihige Einheitsmatrix ist, und bei der letzten, daß die Transponierte von $R_\sigma U$ die gleiche Hauptdiagonale besitzt wie das R_σ-Bild der Transponierten von U.

Schließlich sei noch bemerkt: Mit $U = (u_{ik})$, $\overline{U} = (u^{ik})$ wird

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ u_{m'+1,1}, & \cdots, & u_{m'+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,1}, & \cdots, & u_{m,m} \end{pmatrix} \overline{U} = \begin{pmatrix} u^{11}, & \cdots, & u^{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u^{m'1}, & \cdots, & u^{m'm} \\ & N(U) & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & 0 & N(U) \end{pmatrix}$$

wie aus $U\overline{U} = E \cdot N(U)$ ersichtlich, und durch Hauptnormenbildung nach Theorem 7, Korollar 3 von Theorem 7 und Theorem 8,2:

$$N\begin{pmatrix} u_{m'+1,m'+1}, & \cdots, & u_{m'+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,m'+1}, & \cdots, & u_{m,m} \end{pmatrix} \cdot (N(U))^{m'h-1} = N\begin{pmatrix} u^{11}, & \cdots, & u^{1m'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u^{m'1}, & \cdots, & u^{m'm'} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

womit für $m' = 1$ eine Formel gewonnen ist, die gegebenenfalls einen Induktionsschluß nach m bei geradem h für die positive Definitheit von $N(U)$ ermöglicht.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

JURKAT, W., und A. PEYERIMHOFF
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 186—203 (1953)

Summierbarkeitsfaktoren.

Von
WOLFGANG JURKAT und ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Wir haben kürzlich[1]) Spezialfälle eines Problems über Summierbarkeitsfaktoren behandelt. Dieses Problem kann man allgemein so formulieren: Ausgehend von zwei Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird nach genauen Bedingungen dafür gefragt, daß eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ jede $\mathfrak{A}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ überführt. Die Zahlen $\bar{\varepsilon}_\nu$ wollen wir dann Summierbarkeitsfaktoren nennen.

Für CESÀROsche Verfahren gab I. SCHUR [*18*] notwendige und hinreichende Bedingungen ohne Beweis an; Beweise gaben BOSANQUET [*1*], [*2*], [*3*] und KNOPP [*14*] (vgl. ferner die bei HARDY [*7*], S. 146 zitierten Arbeiten). Im Falle $\mathfrak{B}$ = Konvergenz, d. h. für Konvergenzfaktoren sind genaue Bedingungen bekannt, wenn $\mathfrak{A}$ gewisse NÖRLUND-Verfahren[2]) oder RIESZsche Mittel[3]) sind. In unserer oben erwähnten Arbeit konnten wir das Problem vollständig lösen für die Spezialfälle $\mathfrak{B}$ = Konvergenz und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Dabei hatten wir vorausgesetzt, daß für $\mathfrak{A}$ ein gewisser Mittelwertsatz gilt. Diese letzte Voraussetzung wollen wir auch in dieser Arbeit beibehalten, doch $\mathfrak{B}$ darf jetzt weitgehend beliebig sein. Es wird an $\mathfrak{A}$ nur noch durch eine Vergleichsbedingung allgemeiner Art gebunden sein, die in der Natur der Sache zu liegen scheint. Unter diesen Voraussetzungen werden wir das Problem vollständig lösen.

In § 1 formulieren wir den Hauptsatz in seinen verschiedenen Formen. Der Beweis erfolgt in § 2. In § 3 werden die Voraussetzungen diskutiert, unter anderem wird gezeigt, daß unsere früheren Ergebnisse Spezialfälle des Hauptsatzes sind. Als Anwendungen untersuchen wir bewichtete arithmetische Mittel, NÖRLUND-Verfahren, CESÀROsche Verfahren und RIESZsche Mittel. Insbesondere werden auch spezielle Summierbarkeitsfaktoren für diese Verfahren angegeben. Eine Reihe bekannter Sätze sind als Spezialfälle in unseren Überlegungen enthalten.

1. Der Hauptsatz.

Wir betrachten (reelle) Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$ der Form

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n}{}' a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n}{}' \bar{a}_{n\nu} a_\nu \qquad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right) \tag{1}$$

mit

$$a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu > n, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n,\nu+1}. \tag{2}$$

[1]) JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*].
[2]) MOORE [*15*].
[3]) JURKAT [*9*], [*11*].

Die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Matrizen $A = (a_{nv})$ bzw. $\overline{A} = (\bar{a}_{nv})$ heißen normal, wenn

$$a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0$$

ist. Mit $Sp_0(A)$ und $Sp_1(\overline{A})$ bezeichnen wir die folgenden Spaltenbedingungen

$Sp_0(A)$: $\quad a_{nv} \to 0$ für $n \to \infty$, v fest,

$Sp_1(\overline{A})$: $\quad \bar{a}_{nv} \to 1$ für $n \to \infty$, v fest.

Für A gilt der Mittelwertsatz $M(A)$, wenn für jede Folge $\{s_v\}$ und für alle $n \leqq m$ die Ungleichung

$M(A)$: $$\left| \sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v \right| \leqq K \left| \sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v \right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n)$$

mit geeignetem n' gilt[4]). Entsprechende Bezeichnungen gelten für die Transformation $\mathfrak{B}$

$$\tau_n = \sum_{v=0}^{n} b_{nv} s_v = \sum_{v=0}^{n} \bar{b}_{nv} a_v .$$

Zum Beweis des Hauptsatzes brauchen wir eine gewisse Vergleichsbedingung $V(A, B)$ zwischen A und B: Für jede Folge $\{s_v\}$ und beliebig vorgegebene Zahlen n, m', m mit $n \leqq m' \leqq m$ gilt

$V(A, B)$: $$\left| a_{m'n} \sum_{v=0}^{n} b_{mv} s_v \right| \leqq K \left| b_{m'n} \sum_{v=0}^{n''} a_{nv} s_v \right|$$

mit geeigneten Zahlen n', n'' $(n'' \leqq n',\ n'' \leqq n,\ n' \leqq m)$. Durch $V(A, B)$ wird also verlangt, daß Zeilenstücke der Transformation $\mathfrak{B}$ sich mit vorgeschriebenem Faktor durch Zeilenstücke der Transformation $\mathfrak{A}$ abschätzen lassen. Mit hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit von $V(A, B)$ werden wir uns in § 3 beschäftigen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Hauptsatz zu formulieren. Dabei wollen wir statt der $\mathfrak{A}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_v$ allgemeiner eine beliebige Größenordnung der $\mathfrak{A}$-Transformation zulassen. Dies wird keinerlei Mehraufwand bei den Beweisen erfordern.

Satz 1. *Die Matrizen A und B seien normal, und es gelte $M(A)$, $Sp_0(A)$ und $V(A, B)$. Die Transformation $\mathfrak{B}$ sei permanent.*

Notwendig und hinreichend dafür, daß aus

(S) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad bzw. \quad \sigma_n = O(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$ [5])

stets die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \bar{\varepsilon}_v$ folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:

$(\overline{F})$ *Es gilt die Darstellung*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_v = \bar{\varepsilon}_v - \bar{\varepsilon}_{v+1} = \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n a_{nv} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < +\infty$$

[4]) Vgl. [12].

[5]) Das Zeichen „$\nearrow$“ („$\searrow$“) bedeutet: wächst (fällt) monoton im weiteren Sinn.

oder auch (falls die folgende Darstellung konvergiert)

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \quad \textit{mit passendem } \alpha;$$

$$(\overline{G}) \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}} \quad \textit{bzw.} \quad (\overline{g}) \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}.$$

Zusatz. Die Voraussetzung $Sp_0(A)$ kann ersetzt werden durch

$$(3) \qquad a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest.}$$

Eine Variante von Satz 1 ist

Satz 2. *Voraussetzungen wie bei Satz 1 (bzw. Zusatz). Notwendig und hinreichend dafür, daß aus (S) stets die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit*[6]*) der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt, sind die Bedingungen $(\overline{F})$ und $(\overline{G})$.*

Die Beweise dieser beiden Sätze erbringen wir in § 2.

Neben $V(A, B)$ kann man auch die nachstehende Bedingung $V'(A, B)$ betrachten:

1°. Aus $\sigma_n = O(\eta_n)$ folgt stets $\tau_n = O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}}$ $(0 < \eta_n \nearrow)$;

2°. Zu jedem k und n gibt es ein ϱ $(k \leqq \varrho \leqq n)$, so daß gleichmäßig für $k \leqq n$ die Abschätzung

$$\sum_{\mu=0}^{k} \left| \Delta_\mu\left(\frac{\bar{a}_{k\mu} b_{n\mu}}{a_{\varrho\mu}}\right) = O(1) \qquad \left(\Delta_\mu\left(\frac{\bar{a}_{k\mu} b_{n\mu}}{a_{\varrho u}}\right) = \frac{\bar{a}_{kk} b_{nk}}{a_{\varrho k}} \quad \text{für} \quad \mu = k\right)\right.$$

besteht. (Natürlich ist hierbei $a_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$ anzunehmen.) Es gilt dann

Satz 3. *Ersetzt man in den Sätzen 1 und 2 die Voraussetzung $V(A, B)$ durch $V'(A, B)$, so bleiben diese (mit Zusatz) wörtlich richtig.*

Die Voraussetzungen $V(A, B)$ und $V'(A, B)$ sind eng miteinander verwandt; z.B. sind die hinreichenden Bedingungen für $V(A, B)$ von § 3 im wesentlichen auch hinreichend für $V'(A, B)$. Uns schien jedoch die Bedingung $V'(A, B)$ einfacher und natürlicher, deshalb wollen wir sie im folgenden bevorzugen.

2. Beweis des Hauptsatzes.

2.1. Wir beschäftigen uns zuerst mit dem notwendigen Teil des Beweises.

Lemma 1. *Die Matrizen A und B seien normal, und es gelte $Sp_0(A)$, $Sp_1(\overline{B})$. (Zusatz wie bei Satz 1.)*

Dann sind die Bedingungen $(\overline{F})$ und $(\overline{G})$ bzw. $(\overline{g})$ notwendig für den in Satz 1 beschriebenen Sachverhalt.

Beweis. a) Die Notwendigkeit der Bedingung $(\overline{F})$. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [16], Satz 3.6 bzw. [11], Lemma 16. Ohne Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel kann man auch folgendermaßen schließen: Ist

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} \bar{b}_{n\nu} \bar{a}'_{\nu\mu} \bar{\varepsilon}_\nu \qquad \left(a_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \bar{a}'_{\nu\mu} \sigma_\mu\right)$$

[6]) Das heißt, wenn die $\mathfrak{B}$-Transformation der Reihe beschränkt ist.

konvergent für $n \to \infty$ und jede Nullfolge σ_ν/η_ν, dann gibt es nach dem Satz von TOEPLITZ (vgl. die Formulierung dieses Satzes bei [13], Lemma 6) eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n \eta_n| < \infty$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu \sigma_\mu$$

ist. Setzt man hier $a_k = 1$, $a_{k+1} = -1$, $a_\nu = 0$ sonst — was wegen $Sp_0(A)$ erlaubt ist — und benutzt $Sp_1(\bar{B})$, so ergibt sich gerade die Darstellung $(\bar{F})$. Im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$ ist $(\bar{F})$ erst recht notwendig, da die Klasse der zugelassenen Reihen nicht kleiner geworden ist.

b) Die Notwendigkeit der Bedingungen $(\bar{G})$ bzw. $(\bar{g})$. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [11], Lemma 16. Wenn (4) für jede Nullfolge σ_ν/η_ν konvergieren soll, so muß wieder nach dem Satz von TOEPLITZ der Koeffizient von σ_n/η_n beschränkt bleiben, d.h.

$$\eta_n \bar{b}_{nn} \bar{a}'_{nn} \bar{\varepsilon}_n = O(1) \qquad \left(\bar{a}'_{nn} = \frac{1}{\bar{a}_{nn}} = \frac{1}{a_{nn}}, \qquad \bar{b}_{nn} = b_{nn}\right).$$

Dies ist aber gerade die Bedingung $(\bar{G})$. Entsprechend schließt man im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$.

Der notwendige Teil von Satz 2 wird durch das folgende Lemma auf den notwendigen Teil von Satz 1 zurückgeführt.

Lemma 2. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $M(A)$, $Sp_0(A)$, $Sp_1(\bar{B})$. (Zusatz wie bei Satz 1.)*

Wenn aus $\sigma_n = o(\eta_n)$ (oder sogar aus $\sigma_n = O(\eta_n)$) stets die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt, so hat $\sigma_n = o(\eta_n)$ sogar die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit dieser Reihe zur Folge.

Der Beweis von Lemma 2 ergibt sich aus einer leichten Verallgemeinerung von Satz 3 und Lemma 4 bei [13]:

Lemma 3. *Die Matrix A sei normal und erfülle $M(A)$ und $Sp_0(A)$. Für B gelte*

$$b_{n\nu} \to \beta_\nu \quad \text{für} \quad n \to \infty, \ \nu \text{ fest.}$$

Wenn aus $\sigma_n = o(1)$ stets $\tau_n = O(1)$ folgt, dann folgt aus $\sigma_n = o(1)$ sogar die Konvergenz von τ_n. (Wenn $\beta_\nu = 0$ ist, so ist $\tau_n = o(1)$.)

Lemma 2 ergibt sich, wenn wir für A die Matrix $(a_{n\nu}/\eta_n)$ und für B die Matrix $(\bar{b}_{n\nu}\bar{\varepsilon}_\nu)$ nehmen.

2.2. Die beiden folgenden Lemmata dienen zur Vorbereitung für den hinreichenden Teil des Beweises.

Lemma 4. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $M(A)$ und $Sp_0(A)$. (Zusatz wie bei Satz 1.) Die Transformation $\mathfrak{B}$ sei permanent.*

Dann ist die Bedingung $(\bar{F})$ notwendig und hinreichend dafür, daß aus (S) stets die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu$ folgt.

Dies ist eine einfache Erweiterung von [16], Satz 5.3 bzw. [11], Lemma 15. (Wir werden nur den hinreichenden Teil benötigen.)

Lemma 5. *Voraussetzungen wie bei Lemma 4. Notwendig und hinreichend dafür, daß aus* $\sigma_n = o(\eta_n)$ *stets die* $\mathfrak{B}$*-Beschränktheit oder* $\mathfrak{B}$*-Summierbarkeit von* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *folgt, sind die Bedingungen* $(\bar{F})$ *und*

$(\bar{G}_1)$: $s_n \bar{\varepsilon}_n$ *ist stets* $\mathfrak{B}$*-beschränkt, wenn* $\sigma_n = o(\eta_n)$ *ist.*

Notwendig und hinreichend dafür, daß aus $\sigma_n = O(\eta_n)$ *stets die* $\mathfrak{B}$*-Beschränktheit bzw.* $\mathfrak{B}$*-Summierbarkeit von* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *folgt, sind die Bedingungen* $(\bar{F})$ *und*

$(\bar{G}_2)$: $s_n \bar{\varepsilon}_n$ *ist stets* $\mathfrak{B}$*-beschränkt bzw.* $\mathfrak{B}$*-limitierbar, wenn* $\sigma_n = O(\eta_n)$ *ist.*

(Wir werden nur den hinreichenden Teil von Lemma 5 brauchen.)

Beweis. Es handelt sich um eine einfache Erweiterung von [12], Satz 9 (dort ohne Beweis). Die Bedingung $(\bar{F})$ ist in allen Fällen notwendig nach Lemma 1, Teil a) bzw. Lemma 2. Durch partielle Summation erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = s_n \bar{\varepsilon}_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II}. \tag{5}$$

Wird $(\bar{F})$ vorausgesetzt, so ist nach Lemma 4 (mit $\mathfrak{B}$ = Konvergenz) der Ausdruck II sogar konvergent. Im Falle $\sigma_n = o(\eta_n)$ genügt nach Lemma 2 die $\mathfrak{B}$-Beschränktheit von (5), so daß $(\bar{F})$ mit $(\bar{G}_1)$ zusammen notwendig und hinreichend ist. Im Falle $\sigma_n = O(\eta_n)$ erkennt man unmittelbar $(\bar{G}_2)$ als die noch fehlende Bedingung.

2.3. Wir erbringen nun den hinreichenden Teil des Beweises. Nach Lemma 5 genügt es, die $\mathfrak{B}$-Transformation von $s_n \bar{\varepsilon}_n$ zu betrachten:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu &= \bar{\varepsilon}_n \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta \bar{\varepsilon}_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu \\ &= \mathrm{I} - \mathrm{II}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Zur Abschätzung von I benutzen wir die folgende einfache Bemerkung, die gleichzeitig die Bedeutung von $V(A, B)$ beleuchtet.

Lemma 6. *Die Matrix* A *sei normal, und es gelte* $M(A)$ *und* $V(A, B)$. *Dann folgt aus*

$$\sigma_n = O(\eta_n) \quad \text{stets} \quad \tau_n = O(\eta_n) \frac{b_{nn}}{a_{nn}}$$

(und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern).

Beweis. Es ist nach Voraussetzung

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = O(1) \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \sum_{\nu=0}^{n''} a_{n'\nu} s_\nu = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O(\eta_n).$$

(Eine derartige Abschätzung läßt sich nach [11], Lemma 11 bzw. § 2.2 nicht verbessern. Die Beweismethode ist die gleiche wie bei Lemma 1, Teil b).)

Nach Lemma 6 folgt aus (S) und $(\overline{G})$ bzw. $(\overline{g})$

$$\mathrm{I} = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} = O(1)$$

bzw.

$$= o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{a_{nn}}{b_{nn}}O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} = o(1).$$

Weiter gilt wegen $(\overline{F})$

$$\mathrm{II} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\varrho=\nu}^{\infty}\alpha_\varrho a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu = \sum_{\varrho=0}^{\infty}\alpha_\varrho\sum_{\nu=0}^{k}a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu \qquad \text{mit} \quad k = \mathrm{Min}(\varrho, n-1).$$

Der Ausdruck II wird konvergent sein, wenn

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{k}a_{\varrho\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu = O(\eta_\varrho)$$

gleichmäßig in ϱ, n ist. Denn die linke Seite von (7) strebt wegen $Sp_0(B)$ bei festem ϱ gegen 0 für $n\to\infty$. Durch Anwendung von $M(A)$ läßt sich (7) reduzieren auf

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{k'}a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu = O(\eta_{k'}) \quad \text{gleichmäßig für } k' < n.$$

Die Abschätzung (8) folgt aber aus $V(A, B)$ und $M(A)$:

$$\sum_{\nu=0}^{k'}a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu = O(1)\sum_{\nu=0}^{k'}|b_{k'\nu}|\,\eta_{k'} = O(\eta_{k'}).$$

Damit sind die Bedingungen $(\overline{G}_1)$ bzw. $(\overline{G}_2)$ erfüllt und somit nach Lemma 5 die Sätze 1 und 2 bewiesen.

Wenn wir noch einmal den Beweis durchgehen, so stellen wir fest, daß die Voraussetzung $V(A, B)$ nur an zwei Stellen zur Geltung kam, einmal bei Lemma 6 und dann wesentlich beim Beweis der Abschätzung (8).

An diese Bemerkung läßt sich leicht ein Beweis von Satz 3 anschließen. Es genügt zu zeigen, daß die Abschätzung (8) aus $V'(A, B)$ und $M(A)$ folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{k'}a_{k'\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b_{n\mu}s_\mu = \sum_{\mu=0}^{k'}\overline{a}_{k'\mu}b_{n\mu}s_\mu \quad (k' < n)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k'}\frac{\overline{a}_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}a_{\varrho'\mu}s_\mu = \sum_{\mu=0}^{k'}\Delta_\mu\left(\frac{a_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}\right)\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\varrho'\nu}s_\nu$$

$$= O(1)\sum_{\mu=0}^{k'}\Delta_\mu\left(\frac{\overline{a}_{k'\mu}b_{n\mu}}{a_{\varrho'\mu}}\right)\cdot\eta_{k'} = O(\eta_{k'}).$$

3. Diskussion der Voraussetzungen.

Wir werden uns jetzt mit hinreichenden Bedingungen für die im Hauptsatz auftretenden Voraussetzungen, besonders für $V(A, B)$ beschäftigen. Dabei wird sich zeigen, daß die beiden schon behandelten Spezialfälle unseres Problems in Satz 1 enthalten sind. Darüber hinaus werden wir aber leicht nachzuprüfende Bedingungen erhalten, die weitere Anwendungen ermöglichen.

3.1. Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, so ist die entsprechende Bedingung $V(A, A)$ stets erfüllt ($n'' = n$, $n' = m$). Die in Satz 1 geforderten Voraussetzungen lauten: permanent, normal, $M(A)$. Die Bedingung $(\overline{G})$ folgt aus $(\overline{F})$, wenn η_n beschränkt bleibt. Ist η_n nicht beschränkt, so bedeutet $(\overline{G})$, daß $(\overline{F})$ mit $\alpha = 0$ gelten soll. Die Bedingung $(\bar{g})$ bedeutet immer, daß $(\overline{F})$ mit $\alpha = 0$ gelten soll. Das Ergebnis der Sätze 1 und 2 stellt also in dem Fall $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ eine leichte Verallgemeinerung von [*12*], Satz 11 dar.

Ist $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{B}$ nicht schwächer als $\mathfrak{A}$ (Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ wie oben), so ist $(\overline{F})$ nach § 2.1 jedenfalls notwendig. Wenn $\alpha = 0$ ist, so ist $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ nach den eben angestellten Überlegungen $\mathfrak{A}$-summierbar, also erst recht $\mathfrak{B}$-summierbar. An die Stelle der Bedingungen $(\overline{G})$ bzw. $(\bar{g})$ tritt dann die Forderung, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha$ auch zulässige Faktoren sein müssen. Im Falle $\sigma_n = o(1)$ sind z.B. beliebige α zulässig. Die Behauptungen der Sätze 1 bis 3 bleiben in der alten Form richtig, wenn B normal ist und die obige Forderung in den sowieso notwendigen Bedingungen $(\overline{G})$ bzw. $(\bar{g})$ enthalten ist.

Bedeutet $\mathfrak{B}$ die Konvergenz, so ist die entsprechende Bedingung $V(A, E)$ wieder von selbst erfüllt:

$$|a_{nn} s_n| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq K \left| \sum_{\nu=0}^{n''} a_{n\nu} s_\nu \right|.$$

Die in Satz 1 geforderten Voraussetzungen lauten: A normal, $M(A)$, $S\not{p}_0(A)$. Das Ergebnis der Sätze 1 und 2 stellt in diesem Fall eine leichte Verallgemeinerung von [*12*], Satz 10 dar.

3.2. Wir werden jetzt hinreichende Bedingungen für $V(A, B)$, ausgedrückt durch die Matrixelemente, angeben:

Satz 4. *Hinreichend für $V(A, B)$ sind*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} = O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right) \quad \textit{gleichmäßig für} \quad n \leq m \tag{9}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \left| \frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}} \right| + \left| \frac{b_{mn}}{b_{nn}} \right| = O(1) \quad \textit{gleichmäßig für} \quad n \leq m. \tag{10}$$

Statt (10) *kann auch*

$$\frac{b_{mn}}{a_{mn}} = O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}}\right) \quad \textit{gleichmäßig in} \quad n \leq m' \leq m \tag{11}$$

gefordert werden. (Natürlich ist $a_{n\nu} \neq 0$, $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leq n$ anzunehmen.)

Zusatz. Die Bedingungen (9), (10) oder (11) sind z. B. erfüllt, wenn die folgenden entsprechend numerierten Bedingungen gelten:

(9′) $$0 \leqq \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \nearrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq m);$$

(10′) $$\frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}} \quad \text{monoton in } \nu \text{ und beschränkt } (\nu \leqq n \leqq m);$$

(11′) $$0 \leqq \frac{b_{mn}}{a_{mn}} \searrow \quad \text{für} \quad m \nearrow \qquad (n \leqq m).$$

Beweis. Es ist bei vorgegebenen Zahlen $n \leqq m' \leqq m$ wegen (9)

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_{m\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{m'\nu}}{a_{m'\nu}} \frac{b_{m\nu}}{b_{m'\nu}} a_{m'\nu} s_\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \left(\frac{b_{m'\nu}}{a_{m'\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu + \frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu$$

$$= O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \right) \sum_{\mu=0}^{n'} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu \qquad (n' \leqq n)$$

und weiter wegen (10)

$$\sum_{\mu=0}^{n'} \frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} a_{m'\mu} s_\mu = \sum_{\mu=0}^{n'-1} \Delta_\mu \left(\frac{b_{m\mu}}{b_{m'\mu}} \right) \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{m'\nu} s_\nu + \frac{b_{mn'}}{b_{m'n'}} \sum_{\nu=0}^{n'} a_{m'\nu} s_\nu$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{n''} a_{m'\nu} s_\nu \qquad (n'' \leqq n).$$

Wird (9) und (11) vorausgesetzt, so kann man folgendermaßen schließen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} a_{m\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \left(\frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{m\mu} s_\mu + \frac{b_{mn}}{a_{mn}} \sum_{\mu=0}^{n} a_{m\mu} s_\mu$$

$$= O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}} \right) \sum_{\mu=0}^{n''} a_{m\mu} s_\mu \qquad (n'' \leqq n)$$

$$= O\left(\frac{b_{m'n}}{a_{m'n}} \right) \sum_{\nu=0}^{n''} a_{m\nu} s_\nu.$$

Kombiniert man Satz 4 mit den hinreichenden Bedingungen für $M(A)$ bei [*12*], Satz 1, so entstehen einfache hinreichende Bedingungen für die Voraussetzungen von Satz 1. Auf diese Weise erhalten wir z. B. den folgenden Satz, dessen Voraussetzungen so formuliert sind, wie sie bei Anwendungen am handlichsten sind.

Satz 5. *Die Transformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien permanent. Es sei*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \Delta_\nu \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \right| = O\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right) \quad \textit{gleichmäßig für} \quad n \leq m \tag{9}$$

oder spezieller

$$0 \leq \frac{b_{m\nu}}{a_{m\nu}} \nearrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leq \nu \leq m). \tag{9'}$$

Weiter gelte

$$\frac{b_{m\nu}}{b_{n\nu}} \quad \textit{monoton in } \nu \textit{ und beschränkt} \quad (\nu \leq n \leq m) \tag{10'}$$

und

$$0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K, \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \qquad (\nu \leq n \leq m). \tag{12}$$

(Natürlich ist $a_{n\nu} \neq 0$, $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leq n$ anzunehmen.)

Genau dann geht jede $\mathfrak{A}$-summierbare bzw. $\mathfrak{A}$-beschränkte Reihe $\sum a_\nu$ in eine $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ über, wenn gilt

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \qquad (\alpha \textit{ beliebig}, \quad \sum |\alpha_n| < \infty) \tag{13}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{a_{nn}}{b_{nn}}\right). \tag{14}$$

Zusatz. Allgemeiner kann die $\mathfrak{A}$-Summierbarkeit bzw. $\mathfrak{A}$-Beschränktheit durch die Bedingung (S) mit einer beliebigen Größenordnung η_n ersetzt werden, und statt der Permanenz von $\mathfrak{A}$ genügt die Bedingung $Sp_0(A)$ oder

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \ \nu \text{ fest}. \tag{15}$$

Ein entsprechender Satz gilt auch für $\mathfrak{B}$-Beschränktheit.

Der Zusatz ist von Bedeutung für Matrizen der Form $a_{n\nu} = \frac{z_{n\nu}}{g_n}$. Es wird vorkommen, daß auch die „Zählermatrix" $(z_{n\nu})$ die Voraussetzungen des Satzes an Stelle von $(a_{n\nu})$ erfüllt, wenn man sich auf solche Größenordnungen η_n beschränkt, für die (15) gilt. Die Bedingung (S) für $(z_{n\nu})$ bedeutet aber nichts anderes, als

$$\sigma_n = o\left(\frac{\eta_n}{g_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad O\left(\frac{\eta_n}{g_n}\right),$$

so daß man auf diese Weise auch die Summierbarkeit mit bestimmten Geschwindigkeiten untersuchen kann.

3.3. Die Bedingungen des Satzes 5 sind bei Anwendungen verhältnismäßig leicht zu prüfen mit alleiniger Ausnahme von (13) oder allgemein von $(\bar{F})$. Die Untersuchung von $(\bar{F})$ kann oft durch folgenden Satz erleichtert werden:

Satz 6. *Die Matrix B sei normal, und es gelte $Sp_0(B)$. Weiter sei*

(16) $$O(B) \subseteqq O(A), \quad \text{d.h. aus } \tau_n = O(1) \text{ folgt stets } \sigma_n = O(1).$$

Dann folgt aus der Darstellung

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad \text{mit} \quad \sum |\alpha_n \eta_n| < \infty$$

auch eine Darstellung der Form

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \beta_k b_{k\nu} \quad \text{mit} \quad \sum |\beta_k \eta_k| < \infty .$$

Zusatz. Statt $Sp_0(B)$ genügt: $b_{k\nu} = O(\eta_k)$ für $k \to \infty$, ν fest.

Beweis[7]). Da B normal ist, kann man $A = CB$ setzen mit $C = (c_{nk})$. Aus (16) folgt nach dem Satz von Toeplitz

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| = O(1),$$

und daher ist

(17) $$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |\alpha_n| \, |c_{nk}| \, \eta_k = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| \, \eta_k = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \, O(\eta_n) < \infty .$$

Wegen (17) und $Sp_0(B)$ ist die folgende Summationsvertauschung erlaubt

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=\nu}^{n} c_{nk} b_{k\nu}$$

$$= \sum_{k=\nu}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n c_{nk} \right) b_{k\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \beta_k b_{k\nu} .$$

Dabei ist nach (17)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k| \, \eta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n c_{nk} \right| \eta_k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |\alpha_n| \, |c_{nk}| \, \eta_k < \infty ,$$

womit die gewünschte Darstellung gefunden ist. Der Zusatz kann leicht bestätigt werden.

Es wird auch Fälle geben, in denen man unmittelbar sieht, daß die Bedingung $(\overline{F})$ erfüllt ist. Von Interesse ist z.B. der triviale Fall, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = 1$, $\alpha_n = 0$ ist. Wenn etwa $0 < \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \nearrow$ ist, so kann man $\eta_n = \frac{a_{nn}}{b_{nn}}$ setzen und erhält aus den Sätzen 1 und 2 gewisse Vergleichssätze zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (vgl. hierzu Lemma 6).

[7]) Vgl. hierzu [*11*], § 3.2.

4. Anwendungen auf bewichtete arithmetische Mittel und Nörlundverfahren.

In diesem und im folgenden Paragraphen wollen wir Satz 5 auf einige spezielle Verfahren anwenden. Wir haben bei den bisherigen Sätzen stets die Gesamtheit der Summierbarkeitsfaktoren aufgestellt. Im folgenden werfen wir auch die Frage nach speziellen (angebbaren) Faktoren auf. Hier interessieren naturgemäß die „größten" Faktoren, d.h. Faktoren welche die zulässige Größenbeschränkung erreichen.

Wir betrachten zunächst bewichtete arithmetische Mittel $M(p_n)$ und NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$:

$$M(p_n): \qquad \sigma_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ P_n \to \infty\right),$$

$$N(p_n): \qquad \sigma_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ \frac{p_n}{P_n} \to 0\right).$$

4.1. Satz 7. *Für die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ gelte*

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \textit{monoton für } n \geqq n_0 \textit{ und beschränkt.} \tag{18}$$

Genau dann geht jede $M(p_n)$-summierbare bzw. $M(p_n)$-beschränkte Reihe $\sum a_\nu$ in eine $M(q_n)$summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ über, wenn gilt

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{P_n - P_{\nu-1}}{P_n} \qquad (\alpha \textit{ beliebig},\ \textstyle\sum |\alpha_n| < \infty,\ P_{-1} = 0) \tag{19}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{20}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$a_{n\nu} = p_\nu, \qquad b_{n\nu} = \frac{q_\nu}{Q_n}, \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty.$$

Die (19) entsprechende Bedingung lautet dann

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n p_\nu \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum |\alpha_n \eta_n| < \infty. \tag{21}$$

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß die Bedingungen (9), (10') und (12) von Satz 5 erfüllt sind.

Es ist von Bedeutung, daß sich die Bedingung (19) bzw. (21) leicht nach α_n auflösen läßt:

Lemma 7. *Es sei* $p_\nu > 0$, $P_n \to \infty$, $0 < \eta_n \nearrow$. *Dann ist die Bedingung* (21) *völlig gleichbedeutend mit*

$$\sum \eta_\nu \left| \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \right) \right| < \infty, \qquad \bar{\varepsilon}_n = o(P_n). \tag{22}$$

Hinreichend für (21) *oder* (22) *sind*

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \text{ monoton für } \nu \geqq \nu_0 \tag{23}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_\nu = O(1), \qquad \eta_\nu - \eta_{\nu-1} = O(p_\nu)\ ^{8}). \tag{24}$$

Zusatz. Die Bedingung (23) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \bar{\varepsilon}(\lambda_\nu)$, $P_\nu = P(\lambda_{\nu+1})$ ist, wobei $0 \leqq \lambda_\nu \nearrow +\infty$ und $\bar{\varepsilon}(x)$, $P(x)$ beides L-Funktionen im Sinne von Hardy [6], S. 17 sein sollen. Die zweite Bedingung von (24) ist z.B. erfüllt für $\eta_n = P_n$.

Beweis. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß (21) mit

$$\sum \eta_\nu \left| \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \right) \right| < \infty, \qquad \Delta \bar{\varepsilon}_\nu = o(p_\nu) \tag{25}$$

äquivalent ist. Aus (25) folgt sofort (22), aber es gilt auch die Umkehrung. Denn aus dem ersten Teil von (22) folgt schon die Konvergenz von $\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}$; der Grenzwert kann aber nach dem zweiten Teil nur 0 sein.

Daß (23) und (24) hinreichend sind, erkennt man folgendermaßen: Wegen (23) genügt es zu zeigen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\eta_\nu} \right) = O(1).$$

Aus (23) und (24) folgt zunächst $\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \to 0$, so daß wir o.B.d.A. $0 \leqq \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \searrow$ annehmen können. Daraus folgen die Abschätzungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} O(\Delta \bar{\varepsilon}_\nu) = O(1) \tag{26}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \geqq \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_n}{p_n} \left(\sum_{1}^{n} \eta_\nu - \eta_{\nu-1} \right)$$

und aus beiden zusammen

$$\eta_n \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_n}{p_n} = O(1). \tag{27}$$

Damit gilt nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu \Delta \left(\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\eta_\nu} \right) = O(1) - \eta_n \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}}{p_{n+1}} + \sum_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu}$$
$$= O(1), \quad \text{q. e. d.}$$

[8]) Vgl. [9], Satz 1 und 3.

Der Zusatz folgt durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf

$$-\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} = \frac{\bar{\varepsilon}(\lambda_{\nu+1}) - \bar{\varepsilon}(\lambda_\nu)}{P(\lambda_{\nu+1}) - P(\lambda_\nu)}.$$

Satz 8. *Voraussetzungen wie bei Satz 7. Außerdem sei*

$$\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} \quad \textit{monoton für } \nu \geqq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{q_n}\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{28}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ $M(q_n)$*-summierbar für jede* $M(p_n)$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (28) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}\frac{Q_\nu}{P_\nu}$ und P_ν, Q_ν L-Funktionen von ν sind.

Allgemeiner kann man betrachten:

$$a_{n\nu} = p_\nu, \qquad b_{n\nu} = \frac{q_\nu}{Q_n}, \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}\frac{Q_\nu}{\eta_\nu}.$$

Der Beweis folgt aus Satz 7 und Lemma 7 ($\eta_n = P_n$).

4.2. Satz 9. *Für die* NÖRLUND*-Verfahren* $N(p_n)$ *und* $N(q_n)$ *gelte*

$$0 < p_n \searrow, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \quad \textit{für} \quad 0 \leqq n \nearrow, \tag{29}$$

$$0 < q_n \searrow, \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \nearrow \quad \textit{für} \quad 0 \leqq n \nearrow, \tag{30}$$

$$\frac{q_n}{p_n} \quad \textit{monoton für } n \geqq n_0 \textit{ und beschränkt.} \tag{31}$$

Genau dann geht jede $N(p_n)$*-summierbare bzw.* $N(p_n)$*-beschränkte Reihe* $\sum a_\nu$ *in eine* $N(q_n)$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ *über, wenn gilt*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{P_{n-\nu}}{P_n} \qquad (\alpha \textit{ beliebig}, \ \textstyle\sum|\alpha_n| < \infty) \tag{32}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{33}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$a_{n\nu} = p_{n-\nu}, \qquad b_n = \frac{q_{n-\nu}}{Q_n}, \qquad 0 < \eta_n \nearrow + \infty.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß die Bedingungen (9), (10′) und (12) von Satz 5 erfüllt sind.

In Satz 9 ist als Spezialfall ein von I. SCHUR [18] angegebener, von BOSANQUET [3] und KNOPP [14] bewiesener Satz über CESÀROsche Verfahren enthalten, allerdings nur für Ordnungen zwischen 0 und 1. Wir setzen etwa $N(p_n) = C_\alpha$, $N(q_n) = C_\beta$ mit $0 \leqq \beta \leqq \alpha \leqq 1$. Die Voraussetzungen von Satz 9 sind dann erfüllt. Die Bedingung (32) kann in diesem Fall durch die nach α_n

aufgelöste Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}|\Delta^{\alpha+1}\bar{\varepsilon}_n| < +\infty \tag{32'}$$

ersetzt werden (vgl. [16], S. 40ff.). Die (32) entsprechende Bedingung im Falle des Zusatzes würde lauten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^{\alpha+1}\bar{\varepsilon}_n| < +\infty.$$

Satz 10. *Voraussetzungen wie bei Satz 9. Außerdem sei*

$$\Delta\bar{\varepsilon}_\nu \text{ monoton für } \nu \geq \nu_0, \quad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right). \tag{34}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu\bar{\varepsilon}_\nu$ $N(q_n)$*-summierbar für jede* $N(p_n)$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (34) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{Q_\nu}{P_\nu}$ und P_ν, Q_ν L-Funktionen von ν sind. Allgemeiner kann man betrachten:

$$a_{n\nu} = p_{n-\nu}, \qquad b_{n\nu} = \frac{q_{n-\nu}}{Q_n}, \qquad \bar{\varepsilon}_n = \frac{Q_n}{\eta_n}.$$

Zum Beweis brauchen wir nach Satz 9 nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingungen (32) erfüllt. Wegen $O(N(p_n)) \subseteq O(C_1)$ (vgl. [13], S. 175) genügt es nach Satz 6, wenn

$$\Delta\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n} \quad \text{mit} \quad \sum|\alpha_n| < \infty$$

ist und dies ist nach Lemma 7 ($p_\nu = 1$, $\eta_n = P_n$) der Fall.

Für $N(p_n) = C_\alpha$, $N(q_n) = C_\beta$ mit $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ erhält man aus Satz 10 die bekannten Faktoren $\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha-\beta}}$ (Riesz [17], Chapman [5], Hardy-Riesz [8], th. 48, Hardy [7], th. 76, Zygmund [19], Bosanquet [4]).

Man könnte noch die Fälle $A = N(p_n)$, $B = M(q_n)$ und $A = M(p_n)$, $B = N(q_n)$ untersuchen, was wir jedoch dem Leser überlassen wollen.

5. Anwendungen auf Rieszsche Mittel.

5.1. Wir gehen zu Anwendungen auf (unstetige) Rieszsche Mittel $R_\lambda^\varkappa$ über, die durch

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa s_\nu = \frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa a_\nu \tag{35}$$

mit

$$0 \leq \lambda_n \to \infty, \qquad \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \qquad 0 \leq \varkappa \leq 1 \tag{36}$$

definiert sind[9]). Zur Abkürzung sei $\Lambda_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$.

[9]) Die stetigen Rieszschen Mittel, bei denen in (35) statt λ_{n-1} ein stetiger Parameter ω vorkommt, sind mit den unstetigen Mitteln nach [10], Satz 2 äquivalent. Daher sind in den folgenden Sätzen auch die entsprechenden Ergebnisse für die stetigen Rieszschen Mittel enthalten.

Satz 11. *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$.

Genau dann geht jede $R_\lambda^{\varkappa'}$*-summierbare bzw.* $R_\lambda^{\varkappa'}$*-beschränkte Reihe* $\sum a_\nu$ *in eine* $R_\lambda^{\varkappa}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *über, wenn gilt*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa'} \qquad (\alpha \text{ beliebig}, \ \sum |\alpha_n| < \infty) \tag{37}$$

und

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_n = o\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right). \tag{38}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf:

$$\bar{a}_{n\nu} = (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty.$$

Der Beweis für $\varkappa = 0$ ergibt sich unmittelbar aus § 3.1 (vgl. [*12*], Satz 13). Ist $\varkappa > 0$, so sind die Bedingungen (9'), (10') und (12) von Satz 5 erfüllt. Wegen (9') vergleiche man [*13*], Satz 9. [Bei der dortigen Formel (81) muß es im Nenner richtig heißen $\lambda_{n+1}^{\varkappa'-\varkappa}$.] Wegen (10') bzw. (12) vergleiche man [*12*], § 3.2.

Für $\lambda_n = n$ erhalten wir durch Satz 11 eine weitere Darstellung der Summierbarkeitsfaktoren für die CESÀROschen Mittel. Für $\varkappa = 1$ ist die Bedingung (37) nach α_n auflösbar, wie sich aus Lemma 7 ergibt.

Satz 12. *Es sei* $0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ *und außerdem*

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \quad \text{monoton für} \quad \nu \geqq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^{\varkappa'-\varkappa}}\right). \tag{39}$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $R_\lambda^{\varkappa}$*-summierbar für jede* $R_\lambda^{\varkappa'}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (39) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{1}{\Lambda_\nu^{\varkappa'-\varkappa}}$ und λ_ν eine L-Funktion von ν ist[10]). Allgemeiner kann man betrachten

$$\bar{a}_{n\nu} = (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \frac{\lambda_{\nu+1}^{\varkappa}}{\eta_\nu} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)^{\varkappa'-\varkappa}.$$

Zum Beweis brauchen wir nach Satz 11 nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingung (37) erfüllt. Wegen $O(R_\lambda^{\varkappa'}) \subseteq O(R_\lambda^1)$ genügt es nach Satz 6, wenn

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_{n+1}} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \quad \text{mit} \quad \sum |\alpha_n| < \infty$$

ist, und dies ist nach Lemma 7 ($p_\nu = \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu$, $\eta_n = P_n$) der Fall.

Für $\lambda_n = n$, d.h. für die CESÀROschen Mittel erhält man aus Satz 12 wieder die bekannten Faktoren $\frac{1}{(n+1)^{\varkappa'-\varkappa}}$.

5.2. Neben $R_\lambda^{\varkappa}$ betrachten wir jetzt noch ein anderes RIESZsches Mittel $R_\mu^{\varkappa} = R_{\Phi(\lambda)}^{\varkappa}$, das zu der Folge $\mu_n = \Phi(\lambda_n)$ gehört. Dabei soll die Funktion

[10]) Vgl. [*9*], Satz 3.

$\Phi(x)$ die folgenden Bedingungen für $x \geqq x_0$ erfüllen:

(40) $$\Phi(x) \to \infty, \qquad \Phi'(x) > 0;$$

(41) $\Phi''(x)$ festes Vorzeichen (d.h. gleichbleibend $\geqq 0$ oder $\leqq 0$);

(42) $$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \quad \text{für} \quad x \nearrow;$$

(43) $$x\,\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = O(1).$$

[Dabei ist (43) im Fall $\Phi''(x) \leqq 0$ von selbst erfüllt.]

Diese Bedingungen sind z.B. erfüllt, wenn $\Phi(x)$ eine L-Funktion ist mit

(44) $$\Phi(x) \to \infty, \quad \Phi(x) = O(x^{\Delta}) \quad \text{für genügend großes } \Delta.$$

(Vgl. [*13*], Satz 12.)

Satz 13. *Es gelte* $0 \leqq \varkappa \leqq 1$ *und* (40) *bis* (43).

Genau dann geht jede $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-summierbare bzw.* $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-beschränkte Reihe* $\sum a_\nu$ *in eine* $R^{\varkappa}_{\lambda}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *über, wenn gilt*

(45) $$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa} \qquad (\alpha \text{ beliebig}, \ \sum |\alpha_n| < \infty)$$

und

(46) $$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_n = O\left(\left(\dfrac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\dfrac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right) & \text{bzw.} \\ \bar{\varepsilon}_n = o\left(\left(\dfrac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\dfrac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right). \end{cases}$$

Zusatz. Allgemeiner kann man Satz 5 (Zusatz) anwenden auf

$$\bar{a}_{n\nu} = \big(\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)\big)^{\varkappa}, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa}, \quad 0 < \eta_n \nearrow +\infty.$$

Der Beweis ist für $\varkappa = 0$ trivial (bekanntes Konvergenzkriterium). Ist $\varkappa > 0$, so sind im Fall $\Phi''(x) \leqq 0$ die Bedingungen (9), (10′) und (12) von Satz 5 erfüllt. Wegen (9) vergleiche man [*13*], Lemma 8 und Satz 10, wegen (10′) bzw. (12) vergleiche man [*12*], § 3.2. Im Falle $\Phi''(x) \geqq 0$ sind $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$ und $R^{\varkappa}_{\lambda}$ äquivalent nach [*13*], Satz 11. Nach § 3.1 ist dann nur zu zeigen, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha$ zulässige Faktoren sind, wenn für $\bar{\varepsilon}_\nu$ die Bedingung (46) erfüllt ist. Dies ist aber der Fall, denn aus (46) folgt wegen (43) $\bar{\varepsilon}_\nu = O(1)$ bzw. $\bar{\varepsilon}_\nu = o(1)$.

Von Interesse ist der Spezialfall $\Phi(x) = \log x$ (logarithmische Mittel). Für $\varkappa = 1$ ist die Bedingung (45) nach α_n auflösbar, wie sich aus Lemma 7 ergibt.

Satz 14. *Voraussetzungen wie bei Satz 13. Außerdem sei*

(47) $$\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_\nu}{\Delta\Phi(\lambda_\nu)} \quad \textit{monoton für} \quad \nu \geqq \nu_0, \qquad \bar{\varepsilon}_n = O\left(\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right)^{\varkappa}\right).$$

Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $R^{\varkappa}_{\lambda}$*-summierbar für jede* $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)}$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$.

Zusatz. Die Bedingung (47) ist z.B. erfüllt, wenn $\bar{\varepsilon}_\nu = \left(\lambda_\nu \frac{\Phi'(\lambda_\nu)}{\Phi(\lambda_\nu)}\right)^\varkappa$ und $\Phi(x)$ eine L-Funktion ist. Allgemeiner kann man betrachten:

$$\bar{a}_{n\nu} = (\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu))^\varkappa, \qquad \bar{b}_{n\nu} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa, \qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \frac{(\lambda_\nu \Phi'(\lambda_\nu))^\varkappa}{\eta(\lambda_\nu)}.$$

Dem Beweis schicken wir ein Lemma voraus:

Lemma 8. *Voraussetzungen wie bei Satz 13. Dann gilt*

$$\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})} = O(1). \tag{48}$$

Ist außerdem

$$x^2 \frac{\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} \quad \textit{monoton für} \quad x \geqq x_0, \tag{49}$$

so gilt auch

$$\lambda_n \frac{\Phi'(\lambda_n)}{\Phi(\lambda_n)} = O\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\Phi(\lambda_{n+1})}\right). \tag{50}$$

Beweis. Wegen (41) ist $\Phi'(x)$ monoton ($x \geqq x_0$) und folglich[11]) auch die Funktion $\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)}{\lambda_{n+1} - x}$, die daher zwischen den Grenzwerten für $x \to \lambda_{n+1}$ und $x \to x_0$ liegt. Setzt man $x = \lambda_n$ und berücksichtigt (43), so folgt (48). Auf die gleiche Weise beweist man (50) durch Betrachtung der Funktion

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(\lambda_n)}{x - \lambda_n} \frac{x}{\Phi(x)} = \frac{1 - \frac{\Phi(\lambda_n)}{\Phi(x)}}{1 - \frac{\lambda_n}{x}} \qquad (x > \lambda_n,\ n \geqq n_0).$$

Der Beweis von Satz 14 verläuft jetzt völlig parallel zum Beweis von Satz 12, da wegen (48) $\bar{\varepsilon}_n = O(1)$ ist. Der Zusatz ergibt sich auch sofort, da wegen (50) die zweite Bedingung von (47) erfüllt ist.

Von Interesse ist der Spezialfall $\Phi(x) = \log x$, $\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda_\nu)}$, in dem alle Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt sind (vgl. HARDY-RIESZ [8], th. 20).

Literatur.

[1] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [2] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors II. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 295—304 (1948). — [3] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors III. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). — [4] BOSANQUET, L. S.: Note on a theorem of M. RIESZ. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **1**, 453—461 (1951). — [5] CHAPMAN, S.: On non integral orders of summability of series and integrals. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **9**, 369—409 (1911). — [6] HARDY, G.H.: Orders of infinity, 2. Aufl. Cambridge 1924. — [7] HARDY, G. H.: Divergent series.

[11]) Wir benutzen folgende Tatsache: Sind die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ differenzierbar, $f(b) = g(b) = 0$ [oder $f(a) = g(a) = 0$], $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $a < x < b$, so folgt aus $\frac{f'(x)}{g(x)}$ monoton für $a < x < b$, daß auch $\frac{f(x)}{g(x)}$ dort monoton ist. (Beweis: $\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}$ hat nach dem Mittelwertsatz festes Vorzeichen.)

Oxford 1949. — [*8*] Hardy, G. H., and M. Riesz: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. — [*9*] Jurkat, W.: Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln. Math. Z. **54**, 262—271 (1951). — [*10*] Jurkat, W.: Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1952). — [*11*] Jurkat, W.: Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Math. Z. **57**, 353—394 (1953). — [*12*] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [*13*] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [*14*] Knopp, K.: Beweis eines von I. Schur in der Theorie der *C*-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. f. Math. **187**, 70—74 (1950). — [*15*] Moore, C. N.: Summable series and convergence factors. New York 1938. — [*16*] Peyerimhoff, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1951). — [*17*] Riesz, M.: Sur les séries de Dirichlet. Compt. Rend. **148**, 1558—1560 (1909). — [*18*] Schur, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. f. Math. **151**, 79—111 (1921). — [*19*] Zygmund, A.: Über einige Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen. Bull. Acad. Polonaise (A) **1927**, 309—331.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 13. Dezember 1952.)

Richert, H.-E.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 204—218 (1953)

Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem.

Von
Hans-Egon Richert.

1. Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n, und wir setzen

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)\, x + \Delta(x). \tag{1}$$

Die van der Corputsche Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen lieferte[1])

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{37}{84}}), \tag{2}$$

was das beste bisher bekannte Resultat in dieser Richtung zu sein scheint.

Die Ausdehnung dieser Methode auf Exponentialsummen mit Funktionen zweier Veränderlicher durch Titchmarsh[2]) führte beim Kreisproblem[3]) und bei der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$[4]) zu Verbesserungen der früheren Ergebnisse.

Hier soll dieses zweidimensionale Analogon der van der Corputschen Methode auf das Dirichletsche Teilerproblem [Abschätzung von $\Delta(x)$] angewandt werden. Dabei sieht man sich im wesentlichen zwei Schwierigkeiten gegenüber. Einmal hat man bei dieser Methode zunächst diejenige Exponentialsumme, auf deren Abschätzung man das vorliegende Problem zurückgeführt hat, mit Hilfe der Weylschen Idee (Hilfssätze 1 und 2) in eine solche, die sich besser als die ursprüngliche behandeln läßt, zu verwandeln. Dies geschieht beim Kreisproblem und auch beim Teilerproblem durch drei Weylsche Schritte. Dabei werden die Abschätzungen um so besser, je öfter man bei dieser Überführung den Hilfssatz 2 an Stelle des Hilfssatzes 1 verwendet. Will man hierbei den Hilfssatz 2 wenigstens einmal benutzen, so kommt es darauf an, die Hessesche Determinante einer gewissen Funktion möglichst gut nach unten abzuschätzen. Mit einmaliger Anwendung von Hilfssatz 2 konnte Titchmarsh diese beim Kreisproblem als definit erkennen, und die Verbesserung seines Resultates durch Hua kam dadurch zustande, daß dieser

[1]) Nieland, L. W.: Over eenige roosterpuntproblemen, Proefschrift Groningen, IV + 70 + III, 1 fig., Groningen, P. Noordhoff.

[2]) Titchmarsh, E. C.: Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 485—500 (1934).

[3]) Titchmarsh, E. C.: Proc. London Math. Soc. (2) **38**, 96—115 (1935). — Hua, L.-K.: Quart. J. Oxford **13**, 18—29 (1942).

[4]) Titchmarsh, E. C.: Quart. J. Oxford **13**, 11—17 (1942). — Min, S.-H.: Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 448—472 (1949).

die beim Kreisproblem nach zweimaliger Anwendung von Hilfssatz 2 entstehende HESSEsche Determinante noch als definit nachwies. Beim Teilerproblem ist jedoch die auftretende HESSEsche Determinante bereits im einfachsten Falle indefinit. Dadurch werden wir veranlaßt, ihre Nullstellen mit einer Streifenfolge zu umgeben, außerhalb deren wir positive untere Schranken angeben können, während wir im innersten Streifen nichts besseres als trivial abzuschätzen wissen. Dieser Weg wurde zuerst in der Arbeit von MIN. der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ mittels dieser Methode, eingeschlagen. Die zweite Schwierigkeit rührt von solchen Teilrechtecken des Hyperbelsektors, in welchen die Abschätzungen erfolgen, her, die von dem Hyperbelbogen getroffen werden. Beim Kreisproblem konnte TITCHMARSH in den entsprechenden Teilen trivial abschätzen. Dieses Vorgehen würde jedoch beim Teilerproblem nicht zu einer Verbesserung von (2) führen. Eine nichttriviale Abschätzung in diesen Gebieten gelingt mit Hilfssatz 5, der eine Verschärfung bzw. Verallgemeinerung zweier Hilfssätze von TITCHMARSH[5]) und MIN[6]) darstellt.

Auf diesem Wege werden wir

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{15}{46}} \log^{\frac{30}{23}} x) \tag{3}$$

beweisen können. Die Exponenten von x in (2) und (3) haben beide die Gestalt $\frac{t}{3t+1}$, und da diese Funktion im Bereich positiver t stark monoton wächst, liefert (3) wegen $15<27$ tatsächlich eine Verschärfung von (2).

2. $c_1, \ldots, c_{11}$ bezeichnen positive absolute Konstanten. Die auftretenden O-Konstanten sind ebenfalls absolut.

Wir schicken einige Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1[7]). *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine reelle Funktion von x_1 und x_2,*

$$S = \sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wobei die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) eines Gebietes G, das ganz in dem Rechteck $a_j \leqq x_j \leqq b_j$, $j = 1, 2$, gelegen ist, erstreckt wird. Ferner sei für natürliches v

$$S_v = \sum \sum e^{2\pi i \{f(n_1, n_2+v) - f(n_1, n_2)\}},$$

worin über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) summiert wird, für die (n_1, n_2) und (n_1, n_2+v) in G gelegen sind. Ist dann ϱ eine natürliche Zahl mit

$$1 \leqq \varrho \leqq b_2 - a_2, \tag{4}$$

so gilt

$$S = O\left(\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho} \sum_{1 \leqq v \leqq \varrho-1} |S_v|\right\}^{\frac{1}{2}}\right).$$

---

[5]) l. c. [3]) Lemma ζ.
[6]) l. c. [4]) Lemma 8.
[7]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma β'.

Hilfssatz 2[8]). *Es sei* $f(x_1, x_2)$ *eine reelle Funktion von* x_1 *und* x_2,

$$S = \sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wobei die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) *eines Gebietes* G, *das ganz in dem Rechteck* $a_j \leqq x_j \leqq b_j$, $j = 1, 2$, *gelegen ist, erstreckt wird. Ferner seien für ganze Zahlen* ν_1, ν_2

$$S' = \sum \sum e^{2\pi i\{f(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2)-f(n_1, n_2)\}}, \qquad S'' = \sum \sum e^{2\pi i\{f(n_1+\nu_1, n_2-\nu_2)-f(n_1, n_2)\}},$$

wo in der ersten Doppelsumme über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) *summiert wird, für die* (n_1, n_2) *und* $(n_1+\nu_1, n_2+\nu_2)$ *in* G *gelegen sind, in der zweiten über alle diejenigen* (n_1, n_2) *mit* (n_1, n_2) *und* $(n_1+\nu_1, n_2-\nu_2)$ *aus* G. *Es seien* ϱ_1 *und* ϱ_2 *natürliche Zahlen mit*

$$1 \leqq \varrho_j \leqq b_j - a_j, \qquad j = 1, 2. \tag{5}$$

Dann gilt

$$S = O\left(\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1^{\frac{1}{2}}\varrho_2^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1\varrho_2}\sum_{1\leq\nu_1\leq\varrho_1-1}\sum_{0\leq\nu_2\leq\varrho_2-1}|S'|\right\}^{\frac{1}{2}}\right) +$$
$$+ O\left(\left\{\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{\varrho_1\varrho_2}\sum_{0\leq\nu_1\leq\varrho_1-1}\sum_{1\leq\nu_2\leq\varrho_2-1}|S''|\right\}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Wie man bei Beachtung der unteren Schranken für ϱ und ϱ_j, $j = 1, 2$, in (4) und (5) erkennt, bleiben diese beiden Hilfssätze richtig, wenn man für jene Parameter reelle Werte zuläßt.

Hilfssatz 3[9]). *Es sei* $f(x_1, x_2)$ *eine reelle, differenzierbare Funktion von* x_1 *und* x_2, $f_{x_1}(x_1, x_2)$ *sei für jeden der zu betrachtenden* x_2*-Werte eine monotone Funktion von* x_1 *und* $f_{x_2}(x_1, x_2)$ *für jeden der zu betrachtenden* x_1*-Werte eine monotone Funktion von* x_2. *Ferner seien*

$$|f_{x_1}(x_1, x_2)| \leqq \tfrac{3}{4}, \quad |f_{x_2}(x_1, x_2)| \leqq \tfrac{3}{4} \text{ für } a_j \leqq x_j \leqq b_j, \; b_j - a_j \leqq l, \quad j = 1, 2, l \geqq 1.$$

G *sei das Rechteck* $a_j \leqq x_j \leqq b_j$, $j = 1, 2$, *oder ein durch eine stetige, monotone Kurve ausgeschnittener Teil desselben. Dann gilt*

$$\sum_G \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)} = \iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2 + O(l).$$

Hilfssatz 4[10]). *Es sei* G *das Rechteck* $a_j \leqq x_j \leqq b_j$, $j = 1, 2$, *oder ein Teil desselben, der durch eine Kurve (oder mehrere) der Gleichung* $x_1 = g(x_2)$, $g(x_2)$ *algebraisch, aus demselben ausgeschnitten ist, und* $M = \max_{j=1,2}(b_j - a_j)$. $f(x_1, x_2)$ *sei eine reelle algebraische Funktion, die in* G *den folgenden Bedingungen genügt:*

$$|M f_{x_1^2} g''(x_2)| \leqq \varkappa r_0, \text{[11]} \tag{6}$$

[8]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma β.
[9]) l. c. [3]) E. C. TITCHMARSH, Lemma γ.
[10]) l. c. [4]) S.-H. MIN, Lemma 8.
[11]) Übrigens erkennt man im Beweis, daß es genügt, $\varkappa = \frac{1}{2}$ zu setzen.

$\varkappa$ eine hinreichend kleine positive Konstante,

$$r_1 \leqq |f_{x_1^3}| \leqq c_1 r_1, \qquad |f_{x_1 x_2}| \leqq c_2 r_1, \qquad |f_{x_2^3}| \leqq c_3 r_1, \qquad f_{x_1^3} f_{x_1 x_2} > 0, \tag{7}$$

$$|f_{x_1^3} f_{x_2^3} - f_{x_1 x_2}^2| > r_0^2, \qquad 0 < r_0 \leqq r_1, \tag{8}$$

$$|f_{x_1^3}| \leqq c_4 r_2, \qquad r_2 \leqq c_5 r_1^{\frac{3}{2}}, \qquad M r_0 r_2 \leqq c_6 r_1^2, \tag{9}$$

$$|f_{x_1^3}^2 f_{x_1 x_2^2} - 2 f_{x_1^3} f_{x_1 x_2} f_{x_1^2 x_3} + f_{x_1 x_3}^2 f_{x_1^3}| \leqq r_1^2 r_3, \qquad r_1^{\frac{1}{2}} r_3 \leqq \tfrac{1}{2} r_0^2, \tag{10}$$

und für eine natürliche Zahl k sei

$$r_1^{k-1} r_3^{2k-1} M = O(r_0^{4k-3}). \tag{11}$$

Dann gilt

$$\iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)} \, dx_1 \, dx_2 = O\left(\frac{1 + |\log r_1| + |\log M|}{r_0}\right). \tag{12}$$

Hilfssatz 5. *Ersetzt man in den Voraussetzungen von Hilfssatz 4 (6) durch*

$$|g''(x_2)| \leqq c_7 r_4 \quad \text{in } G, \tag{13}$$

so gilt

$$\iint_G e^{2\pi i f(x_1, x_2)} \, dx_1 \, dx_2 = O\left(\frac{1 + |\log r_1| + |\log M|}{r_0}\right) + O\left(\frac{M r_1 r_4}{r_0^2}\right). \tag{14}$$

Beweis. Wie Mix in seinem Beweis des Hilfssatzes 4 können wir uns auf die Abschätzung des Integrales

$$I = \int \frac{e^{2\pi i f(g(x_2), x_2)}}{f_{x_1}(g(x_2), x_2)} \, dx_2$$

mit

$$|f_{x_1}| > r_1^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

beschränken, und da (6) in den dortigen drei Fällen nur für den Fall, daß

$$|f_{x_1} g'(x_2) + f_{x_2}| < r_0 r_1^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

und auch

$$|f_{x_1^2} g'(x_2) + f_{x_1 x_2}| < \tfrac{1}{2} r_0 \tag{17}$$

gelten, benötigt wird, können wir sowohl (16) als auch (17) als erfüllt ansehen. Wir setzen

$$y = f_{x_1} g'(x_2) + f_{x_2}. \tag{18}$$

Dann wird

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx_2} &= f_{x_1^3} g'^2 + 2 f_{x_1 x_2} g' + f_{x_2^3} + f_{x_1} g'' \\ &= f_{x_1^2}^{-1} [(f_{x_1^2} g' + f_{x_1 x_2})^2 + (f_{x_1^2} f_{x_2^3} - f_{x_1 x_2}^2) + f_{x_1^2} f_{x_1} g'']. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Ist nun $|f_{x_1^2} f_{x_1} g''| \leqq \frac{1}{2} r_0^2$, so folgt aus (19), (7), (8) und (17)

$$\begin{aligned} \left|\frac{dy}{dx_2}\right| &\geqq |f_{x_1^2}^{-1}| \{|f_{x_1^2} f_{x_2^3} - f_{x_1 x_2}^2| - |f_{x_1^2} g' + f_{x_1 x_2}|^2 - |f_{x_1^2} f_{x_1} g''|\} \\ &\geqq \frac{1}{c_1 r_1} \left\{ r_0^2 - \frac{1}{4} r_0^2 - \frac{1}{2} r_0^2 \right\} = \frac{r_0^2}{4 c_1 r_1}, \end{aligned}$$

also mit (15), (18) und (16)

$$|I| \leq 2r_1^{-\frac{1}{2}} \int_0^{r_0 r_1^{-\frac{1}{2}}} \left| \frac{dx_2}{dy} \right| dy = O(r_1^{-\frac{1}{2}} r_1 r_0^{-2} r_0 r_1^{-\frac{1}{2}}) = O\left(\frac{1}{r_0}\right).$$

Ist dagegen $|f_{x_1^2} f_{x_1} g''| > \frac{1}{2} r_0^2$, so folgt mit (7) und (13) $|f_{x_1}| > \frac{r_0^2}{2c_1 r_1 c_7 r_4}$, und hieraus erhalten wir

$$I = O\left(\frac{M r_1 r_4}{r_0^2}\right).$$

Hilfssatz 6[12]). *Es sei in der Ebene ein Gitter von Rechtecken R_0 der Seitenlängen l_1 und l_2 gegeben. R sei ein Rechteck mit gitterparallelen Seiten der Längen a_1 und a_2. g_1 und g_2 seien zwei Parallelen, die mit den Seiten von R einen Bereich der Fläche V begrenzen. Bezeichnet dann A_0 die Anzahl der Rechtecke R_0, die teilweise oder ganz zwischen g_1 und g_2 und teilweise oder ganz in R liegen, so ist*

$$A_0 = \frac{V}{l_1 l_2} + O\left(\frac{a_1}{l_1} + \frac{a_2}{l_2} + 1\right).$$

3. Es sei

(20) u eine hinreichend große reelle Veränderliche,

und es werde zur Abkürzung

(21) $$U = u^{\frac{8}{13}} \log^{\frac{33}{13}} u, \qquad U_1 = u^{\frac{13}{21}}$$

gesetzt.

(22) G^* sei das Gebiet $U_1 \leq x_1 \leq x_2, \qquad x_1 x_2 \leq U;$

(23) G_0 sei ein Rechteck $N_j \leq x_j \leq N_j' \leq 2N_j$, $j = 1, 2$, oder ein durch den Hyperbelbogen $x_1 x_2 = U$ oder eine Gerade (oder beides) ausgeschnittener Teil desselben mit $G_0 \subseteq G^*$.

Weiter seien

(24) $$f(x_1, x_2) = u^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$

und

(25) $$S = \sum_{G_0} \sum e^{2\pi i f(n_1, n_2)},$$

wo die Summation über alle Gitterpunkte (n_1, n_2) von G_0 erstreckt wird.

Mit den Bezeichnungen

(26) $$\varrho_1 = u^{-\frac{1}{13}} N_1^{\frac{8}{9}} N_2^{\frac{8}{9}} \log^{-\frac{8}{9}} u,$$

(27) $$\varrho_2 = u^{-\frac{1}{9}} N_1^{\frac{8}{9}} N_2^{\frac{8}{9}} \log^{-\frac{8}{9}} u = \varrho_1^2,$$

(28) $$\varrho_3 = u^{-\frac{1}{9}} N_1^{-\frac{1}{13}} N_2^{\frac{17}{18}} \log^{-\frac{8}{9}} u = N_1^{-\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} \varrho_1^2,$$

(29) $$\varrho_4 = u^{-\frac{1}{9}} N_1^{\frac{17}{18}} N_2^{-\frac{1}{13}} \log^{-\frac{8}{9}} u = N_1^{\frac{1}{2}} N_2^{-\frac{1}{2}} \varrho_1^2,$$

[12]) l. c. [4]) S.-H. MIN, Lemma 10.

wenden wir Hilfssatz 1 nacheinander auf S bzw. S_{ν_1}:

$$S = O\left(\frac{N_1 N_2}{\varrho_1^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_1} \sum_{1 \le \nu_1 \le \varrho_1 - 1} |S_{\nu_1}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{30}$$

$$S_{\nu_1} = O\left(\frac{N_1 N_2}{\varrho_2^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_2} \sum_{1 \le \nu_2 \le \varrho_2 - 1} |S_{\nu_2}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{31}$$

und anschließend Hilfssatz 2 auf S_{ν_2} an:

$$\left\{\begin{aligned} S_{\nu_2} = O\left(\frac{N_1 N_2}{\varrho_3^{\frac{1}{2}} \varrho_4^{\frac{1}{2}}}\right) &+ O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_3 \varrho_4} \sum_{0 \le \nu_3 \le \varrho_3 - 1} \sum_{1 \le \nu_4 \le \varrho_4 - 1} |S'_{\nu_3, \nu_4}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right) + \\ &+ O\left(\left\{\frac{N_1 N_2}{\varrho_3 \varrho_4} \sum_{1 \le \nu_3 \le \varrho_3 - 1} \sum_{0 \le \nu_4 \le \varrho_4 - 1} |S''_{\nu_3, \nu_4}|\right\}^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Dabei ist

$$S'_{\nu_3, \nu_4} = \sum_G \sum e^{2\pi i F(n_1, n_2)} \tag{33}$$

mit

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} f(x_1 + \nu_4 t_3, x_2 + \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3, \tag{34}$$

und G ist nach (23) ein Rechteck oder ein durch den Hyperbelbogen $(x_1 + \nu_4)(x_2 + \nu_1 + \nu_2 - \nu_3) = U$ oder eine Gerade (oder beides) ausgeschnittener Teil desselben mit $G \subseteqq G_0 \subseteqq G^*$ und

$$N_1 \le x_1 \le N_1' - \nu_4 \le 2N_1, \quad N_2 \le x_2 \le N_2' - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 \le 2N_2, \quad (x_1, x_2) \in G. \tag{35}$$

Ganz entsprechend ist S''_{ν_3, ν_4} definiert.

Von den Voraussetzungen der Hilfssätze 1 und 2 bleiben nach Beachtung von (23) bis (25) lediglich (4) und (5) nachzuprüfen. Aus (22) und (23) folgt

$$U_1 \le N_1 \le N_2, \qquad N_1 N_2 \le U, \tag{36}$$

und daher haben wir nach (26) bis (29) und (20)

$$\varrho_3 \ge \varrho_2 = \varrho_1^2 \ge u^{-\frac{1}{6}} U_1^{\frac{8}{9}} \log^{-\frac{4}{9}} u \ge 1 \tag{37}$$

und

$$\varrho_4 \ge u^{-\frac{1}{6}} U_1 U^{-\frac{1}{18}} \log^{-\frac{4}{9}} u \ge 1.$$

Die Bedingungen für die oberen Schranken der ϱ_j werden wegen (37) durch

$$\varrho_3 \le N_2' - N_2 - \varrho_1 - \varrho_2 \tag{38}$$

und

$$\varrho_4 \le N_1' - N_1 \tag{39}$$

befriedigt. (38) und (39) setzen wir vorläufig als erfüllt voraus.

4. Zunächst soll die Summe S'_{ν_3, ν_4} abgeschätzt werden. Setzen wir für $(x_1, x_2) \in G$

$$\bar{x}_1 = x_1 + \nu_4 t_3, \qquad \bar{x}_2 = x_2 + \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3, \tag{40}$$

so erhalten wir aus (34) und (24)

$$F(x_1, x_2) = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8} \nu_1 \nu_2 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{x}_1^{-\frac{1}{2}} \bar{x}_2^{-\frac{3}{2}} (\nu_4 \bar{x}_2 - 3\nu_3 \bar{x}_1)\, dt_1\, dt_2\, dt_3. \tag{41}$$

Für

$$h(x_1, x_2) = x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{5}{2}} (\nu_4 x_2 - 3\nu_3 x_1)$$

gelten

$$\begin{cases} h_{x_1^2} = \frac{3}{4} x_1^{-\frac{5}{2}} x_2^{-\frac{5}{2}} (\nu_4 x_2 + \nu_3 x_1), \qquad h_{x_1 x_2} = \frac{3}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} x_2^{-\frac{7}{2}} (\nu_4 x_2 + 5\nu_3 x_1), \\ h_{x_2^2} = \frac{15}{4} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{9}{2}} (\nu_4 x_2 - 7\nu_3 x_1); \end{cases} \tag{42}$$

und mit der Abkürzung

$$Q = \nu_3 N_1 + \nu_4 N_2 \leq \varrho_3 N_1 + \varrho_4 N_2 = 2 N_1^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} \varrho_1^2 \tag{43}$$

haben wir wegen (23) in G_0

$$h_{x_1^2} = O(N_1^{-\frac{5}{2}} N_2^{-\frac{5}{2}} Q), \qquad h_{x_1 x_2} = O(N_1^{-\frac{3}{2}} N_2^{-\frac{7}{2}} Q), \qquad h_{x_2^2} = O(N_1^{-\frac{1}{2}} N_2^{-\frac{9}{2}} Q). \tag{44}$$

Nach dem TAYLORschen Satze ist nun wegen (40)

$$\begin{aligned} h(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = {} & h(x_1, x_2) + \nu_4 t_3 h_{x_1}(x_1, x_2) + (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3) h_{x_2}(x_1, x_2) + \\ & + \tfrac{1}{2} \{\nu_4^2 t_3^2 h_{x_1^2}(x_1^*, x_2^*) + 2\nu_4 t_3 (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3) h_{x_1 x_2}(x_1^*, x_2^*) + \\ & + (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3)^2 h_{x_2^2}(x_1^*, x_2^*)\}, \\ x_1^* = x_1 + \vartheta \nu_4 t_3, \qquad & x_2^* = x_2 + \vartheta(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3), \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1. \end{aligned}$$

Wegen (41), (26) bis (29) und (44) gilt daher, wenn wir zur Abkürzung

$$x_1' = x_1 + \frac{\nu_4}{2}, \qquad x_2' = x_2 + \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{2}$$

einführen,

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8} \nu_1 \nu_2 [h(x_1', x_2') + O(N_1^{-\frac{3}{2}} N_2^{-\frac{7}{2}} Q\, \varrho_1^4)] \\ \qquad\quad = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{8} \nu_1 \nu_2 [h(x_1', x_2') + O(N_1^{-\frac{1}{2}} N_2^{-\frac{5}{2}} Q\, u^{-\frac{3}{2}})]. \end{cases} \tag{45}$$

Beachten wir, daß nach diesem Vorgang im Hinblick auf (35) die ersten partiellen Ableitungen von $F(x_1, x_2)$ nach x_j in G im Fehlerglied einfach durch Division mit N_j, $j = 1, 2$, zu berücksichtigen sind, so erhalten wir mit (42) aus (45)

$$-F_{x_1^2}(x_1, x_2) = \tfrac{3}{32} u^{\frac{1}{2}} \nu_1 \nu_2 x_1'^{-\frac{5}{2}} x_2'^{-\frac{5}{2}} \left(\nu_4 x_2' + \nu_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{3}{2}})\right)$$

und

$$-F_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = \tfrac{3}{32} u^{\frac{1}{2}} \nu_1 \nu_2 x_1'^{-\frac{3}{2}} x_2'^{-\frac{7}{2}} \left(\nu_4 x_2' + 5\nu_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{3}{2}})\right).$$

Daher haben wir wegen (20) und (36) mit der Abkürzung

$$r_1 = \frac{1}{c_8} u^{\frac{1}{2}} \nu_1 \nu_2 N_1^{-\frac{5}{2}} N_2^{-\frac{5}{2}} Q, \tag{46}$$

falls nur c_8 genügend groß gewählt wird, mit passenden positiven Konstanten c_1 und c_2

$$0 < r_1 \leq -F_{x_1^2} \leq c_1 r_1, \qquad 0 < -F_{x_1 x_2} \leq c_2 r_1 N_1 N_2^{-1} \leq c_2 r_1. \tag{47}$$

Setzen wir mit genügend großem c_9

$$r_2 = r_1 N_1^{-1}, \qquad r_3 = c_9 r_1 N_1 N_2^{-2}, \tag{48}$$

so erkennen wir unter Heranziehung von (44) ebenso, daß mit passenden positiven Konstanten c_3 und c_4 in G

$$|F_{x_1^3}| \leq c_3 r_1 N_1^2 N_2^{-2} \leq c_3 r_1, \tag{49}$$

$$|F_{x_1^3}| \leq c_4 r_2 \tag{50}$$

und

$$|F_{x_1^3}^2 F_{x_1 x_2^2} - 2F_{x_1^3} F_{x_1 x_2} F_{x_1^2 x_2} + F_{x_1 x_2}^2 F_{x_1^3}| \leq r_1^2 r_3 \tag{51}$$

gelten. Schließlich ist dort

$$\begin{cases} F_{x_1^3}(x_1, x_2) F_{x_2^3}(x_1, x_2) - F_{x_1 x_2}^2(x_1, x_2) \\ \quad = \frac{9}{2\sqrt{6}} u (v_1 v_2)^2 x_1'^{-3} x_2'^{-7} (v_4 x_2' + (2\sqrt{10} - 5) v_3 x_1') \times \\ \quad \times (v_4 x_2' - (2\sqrt{10} + 5) v_3 x_1' + O(Q u^{-\frac{3}{5}})). \end{cases} \tag{52}$$

Jetzt setzen wir mit positivem c_{10}

$$l_1 = \frac{1}{c_{10} r_1}, \qquad l_2 = \frac{N_2}{c_{10} r_1 N_1} \tag{53}$$

und überdecken die (x_1, x_2)-Ebene mit einem Gitter von Rechtecken mit achsenparallelen Seiten der Längen l_1 und l_2. Diejenigen Teilgebiete G_μ, in die G hierbei zerfällt, denken wir uns in irgendeiner Weise numeriert. Wegen (47) und (49) können wir c_{10} so groß wählen, daß F_{x_1} und F_{x_2} in jedem G_μ um höchstens $\frac{1}{2}$ variieren. Dann existieren aber zwei ganze Zahlen $m_j = m_j(\mu)$, $j = 1, 2$, so daß für die Funktion

$$\overline{F}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - m_1 x_1 - m_2 x_2 \tag{54}$$

dort

$$|\overline{F}_{x_j}| \leq \tfrac{3}{4}, \qquad j = 1, 2,$$

gilt.

Nach (20), (36), (26) und (27) haben wir

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{c_8}{2c_{10}} \left(\frac{U_1^8}{u}\right)^{\frac{3}{5}} \leq \frac{c_8}{2c_{10}} u^{-\frac{3}{5}} (N_1 N_2)^{\frac{8}{5}} \log^{\frac{10}{9}} u \\ \quad = \frac{c_8}{2c_{10}} u^{-\frac{1}{5}} (N_1 N_2)^2 \varrho_1^{-5} \leq \frac{1}{c_{10} r_1} = l_1 \leq l_2, \end{cases} \tag{55}$$

und daher liefert uns Hilfssatz 3 mit $l = l_2$

$$\sum_{G_\mu} \sum e^{2\pi i F(n_1, n_2)} = \sum_{G_\mu} \sum e^{2\pi i \overline{F}(n_1, n_2)} = \iint_{G_\mu} e^{2\pi i \overline{F}(x_1, x_2)} d x_1 d x_2 + O\left(\frac{N_2}{N_1 r_1}\right). \tag{56}$$

Bezeichnet A die Anzahl der G_μ, in die wir G eingeteilt haben, so ist mit (53) gewiß

$$A = O((N_1 l_1^{-1} + 1)(N_2 l_2^{-1} + 1)) = O(N_1 N_2 l_1^{-1} l_2^{-1} + 1) = O(N_1^2 r_1^2 + 1), \tag{57}$$

so daß wir aus (33) und (56)

$$S'_{\nu_3,\nu_4} = \sum_{1\le\mu\le A} \iint_{G_\mu} e^{2\pi i \overline{F}(x_1,x_2)}\, dx_1\, dx_2 + O(N_1 N_2 r_1) + O\left(\frac{N_2}{N_1 r_1}\right) \tag{58}$$

bekommen.

Es seien nun

$$y = \nu_4 x'_2 - \left(2\sqrt{10} + 5\right)\nu_3 x'_1, \tag{59}$$

$$\overline{\nu}_3 = \begin{cases} \nu_3 & \text{für} \quad \nu_3 \ge 1 \\ 1 & \text{für} \quad \nu_3 = 0, \end{cases} \tag{60}$$

$$\eta = Q\,(\nu_1 \nu_2 \overline{\nu}_3)^{-\frac{1}{2}}\, u^{\frac{1}{12}} N_1^{-\frac{7}{12}} N_2^{-\frac{1}{12}} \log^{-\frac{3}{8}} u \tag{61}$$

und

$$L = \left[\frac{\log \dfrac{Q}{\eta}}{\log 2}\right]. \tag{62}$$

Dabei gilt wegen (20), (36) und (26) bis (28) offenbar

$$2 \le u^{-\frac{1}{12}} U_1^{\frac{3}{8}} \le \frac{Q}{\eta} \le Q_1^{\frac{3}{2}} u^{-\frac{1}{12}} (N_1 N_2)^{\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{8}} u = u^{-\frac{3}{8}} (N_1 N_2)^{\frac{3}{8}} \log^{\frac{1}{8}} u\,, \tag{63}$$

so daß insbesondere

$$L \ge 1$$

ist.

Wir betrachten die $2L$-Parallelen

$$|y| = 2^\lambda \eta, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, L-1,$$

und es sei $G_{\lambda,\mu}$ derjenige Teil von G_μ, für den

$$2^\lambda \eta < |y| \le 2^{\lambda+1}\eta, \qquad 0 \le \lambda \le L-1,$$

bzw.

$$|y| > 2^L \eta, \qquad \lambda = L,$$

ist und G'_μ der Teil von G_μ, für den

$$|y| \le \eta$$

gilt.

Trivial schätzen wir die Integrale über die G'_μ ab:

$$\sum_{1\le\mu\le A} \iint_{G'_\mu} e^{2\pi i \overline{F}(x_1,x_2)}\, dx_1\, dx_2 = O\left(\int_{\substack{N_1 \\ |y|\le\eta}}^{2N_1} \int_{N_2}^{2N_2} dx_1\, dx_2\right) = O\left(\frac{N_1 \eta}{\nu_4}\right). \tag{64}$$

In den Teilgebieten $G_{\lambda,\mu}$ von G studieren wir für unsere Funktion $\overline{F}(x_1, x_2)$ die Voraussetzungen der Hilfssätze 4 und 5. Da in (6) bis (10) nur partielle Ableitungen von höherer als erster Ordnung auftreten, können wir uns wegen (54) dort auf die Betrachtung von $F(x_1, x_2)$ beschränken.

Zunächst ist nach unserer Einteilungsvorschrift mit (55) und (36) gewiß

$$M \le 2\,\mathrm{Min}\,(N_2, l_2). \tag{65}$$

Definieren wir dann

$$r_0^2 = \frac{1}{c_8^2} u (\nu_1 \nu_2)^2 N_1^{-3} N_2^{-7} Q 2^\lambda \eta = r_1^2 N_1^2 N_2^{-2} Q^{-1} 2^\lambda \eta, \tag{66}$$

so folgt aus (52) und (63), falls wir nur c_8 in (46) bereits genügend groß gewählt haben, in jedem unserer Gebiete mit einer gewissen Konstanten c_{11}

$$|F_{x_1^2} F_{x_2^2} - F_{x_1 x_2}^2| > r_0^2 \left(2 - c_{11} \frac{Q}{\eta u^{\frac{3}{8}}}\right) > r_0^2. \tag{67}$$

Weiter ist wegen (36)

$$0 < r_0 \leqq r_1 N_1 N_2^{-1} \leqq r_1, \tag{68}$$

und daher auch

$$M r_0 r_2 \leqq 2 N_2 r_1 N_1 N_2^{-1} r_1 N_1^{-1} = 2 r_1^2. \tag{69}$$

Nach (61), (36) und (20) gilt

$$\frac{r_1^2}{r_2} = r_1^{\frac{1}{2}} N_1 \geqq \frac{r_1^{\frac{1}{2}} N_1 2^\lambda \eta}{2 c_9 Q} \left(= \frac{r_0^2}{2 r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right) \geqq \frac{1}{2 c_8^{\frac{1}{2}} c_9} u^{\frac{1}{4}} \log^{-\frac{3}{4}} u (N_1 N_2)^{-\frac{1}{4}} N_1 \geqq 1, \tag{70}$$

und hiermit folgt unter Verwendung von (69) und (61) in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} \frac{r_0^{25}}{r_1^6 r_3^{13} M} &= \left(\frac{r_0^2}{r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right)^{12} \frac{r_0^2 r_2}{r_3 M r_0 r_2} \\ &\geqq \left(\frac{r_0^2}{r_1^{\frac{1}{2}} r_3}\right)^{12} \frac{r_0^2 N_2^2}{2 c_9 r_1^2 N_1^2} \geqq \frac{1}{2 c_8^6 c_9^{13}} u^{\frac{38}{9}} \log^{-\frac{78}{9}} u (N_1 N_2)^{-\frac{152}{9}} N_1^{12} \geqq 1. \end{aligned} \tag{71}$$

Zufolge (47), (49) bis (51) und (67) bis (71) sind die Voraussetzungen (7) bis (11), letztere mit $k = 7$, des Hilfssatzes 4 erfüllt. Wird nun unser vorliegendes Gebiet $G_{\lambda,\mu}$ ausschließlich von Geraden begrenzt, so ist (6) von selbst erfüllt, und (12) gilt. Ist aber eine Begrenzungskurve keine Gerade, so kann es sich nur um den Hyperbelbogen $(x_1 + \nu_4)(x_2 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = U$ handeln, und in Hilfssatz 5 wird dann (13) durch

$$r_4 = \frac{N_1 N_2}{N_2^3} = N_1 N_2^{-2} \tag{72}$$

mit genügend großem c_7 befriedigt, so daß in den $G_{\lambda,\mu}$ jedenfalls stets (14) gilt. Daher haben wir bei Beachtung von (65), (55) und (36)

$$\iint\limits_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i \overline{F}(x_1, x_2)} d x_1 d x_2 = O\left(\frac{N_2 Q^{\frac{1}{2}} \log u}{N_1 r_1 2^{\lambda/2} \eta^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 2^\lambda \eta}\right). \tag{73}$$

Mit (57) und (62) folgt aus (73)

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqq \mu \leqq A} \iint_{G_{L,\mu}} e^{2\pi i \overline{F}(x_1, x_2)} d x_1 d x_2 \\ &\quad = O(N_1 N_2 r_1 \log u) + O(N_2) + O\left(\frac{N_2 \log u}{N_1 r_1}\right) + O\left(\frac{N_2}{N_1^2 r_1^2}\right). \end{aligned} \tag{74}$$

Für festes $\lambda \leqq L-1$ ist die Anzahl A_λ der $G_{\lambda,\mu}$ in G nach Hilfssatz 6 mit

$$V = O\left(\int_{N_1}^{2N_1}\int_{N_2}^{2N_2} \atop {}_{2^\lambda \eta < y \leqq 2^{\lambda+1}\eta} d x_1 d x_2\right) = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1}{\nu_4}\right)$$

$$A_\lambda = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1}{\nu_4 l_1 l_2}\right) + O\left(\frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} + 1\right) = O\left(\frac{2^\lambda \eta N_1^2 r_1^2}{N_2 \nu_4}\right) + O(N_1 r_1) + O(1),$$

und hiernach haben wir mit (73), wenn wir nach (62) und (63) $L = O(\log u)$ beachten,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{0\leqq\lambda\leqq L-1}\ \sum_{1\leqq\mu\leqq A}\ \iint_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i \overline{F}(x_1,x_2)} d x_1 d x_2 \\ &\quad = O(1) \sum_{0\leqq\lambda\leqq L-1} \left(\frac{N_1 r_1 Q^{\frac12} 2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}\log u}{\nu_4} + \frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{N_1 r_1 2^{\lambda/2}\eta^{\frac12}} + \frac{Q}{\nu_4} + \frac{N_2 Q}{N_1 r_1 2^\lambda \eta} + \frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 2^\lambda \eta}\right) \\ &\quad = O\left(\frac{N_1 r_1 Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{\eta^{\frac12}}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{N_1 r_1 \eta^{\frac12}}\right) + \\ &\qquad + O\left(\frac{Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1 r_1 \eta}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 \eta}\right). \end{aligned}\right.$$

Nun fassen wir unsere Ergebnisse aus (58), (64), (74) und (75) zusammen. Wir erhalten bei Beachtung von (43) und (63)

$$S'_{\nu_3,\nu_4} = O\left(\frac{N_1\eta}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_1 r_1 Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q^{\frac12}\log u}{\eta^{\frac12}}\right) + O\left(\frac{N_2 Q}{N_1^2 r_1^2 \eta}\right) + $$
$$+ O\left(\frac{Q\log u}{\nu_4}\right) + O\left(\frac{N_2 Q\log u}{N_1 r_1 \eta}\right).$$

Man rechnet unter Verwendung von (63) und (36) leicht nach, daß hierin das fünfte und sechste durch das erste O-Glied majorisiert werden. In den übrigen Termen setzen wir die Werte von η und r_1 gemäß (61) und (46) ein und benutzen für Q die aus (43) mit (26), (36) und (60) resultierende Abschätzung

$$(\overline{\nu}_3 \nu_4)^{\frac12} (N_1 N_2)^{\frac15} \leqq Q \leqq 2u^{-\frac15}(N_1 N_2)^{\frac{17}{18}}\log^{-\frac46} u.$$

Hiermit bekommen wir

$$S'_{\nu_3,\nu_4} = O\left(\frac{N_1^{\frac{43}{36}} N_2^{\frac{31}{36}}}{u^{\frac16}(\nu_1\nu_2\overline{\nu}_3)^{\frac12}\nu_4\log^{\frac{10}{9}} u}\right) + O\left(\frac{u^{\frac{5}{18}}\nu_1\nu_2\log^{\frac16} u\, N_1^{\frac{7}{18}}}{N_2^{\frac{11}{18}}\nu_4}\right) + $$
$$+ O\left(\frac{(\nu_1\nu_2\overline{\nu}_3)^{\frac14}\log^{\frac43} u\, N_1^{\frac74} N_2^{\frac{31}{24}}}{u^{\frac{1}{24}}}\right) + O\left(\frac{N_1^{\frac{31}{12}} N_2^{\frac{61}{12}}\log^{\frac83} u}{u^{\frac{11}{12}}(\nu_1\nu_2)^{\frac83}\overline{\nu}_3^{\frac13}\nu_4}\right),$$

und da nach (36) hierin der erste Term die übrigen majorisiert, endlich

$$(76)\qquad S'_{\nu_3,\nu_4} = O\left(u^{-\frac{1}{36}} N_1^{\frac{43}{36}} N_2^{\frac{31}{36}}\log^{-\frac{10}{9}} u\,(\nu_1\nu_2)^{-\frac12}\overline{\nu}_3^{-\frac12}\nu_4^{-1}\right).$$

Die Abschätzung der Summe S''_{ν_3,ν_4} kann in ganz analoger Weise erfolgen. Daher werde im folgenden unser Vorgehen nur skizziert.

Ist $\nu_4 \geqq 1$, so haben wir ab (34) mit Ausnahme von (43) und (60) und (52) und (59), wo wir dagegen $(2\sqrt{10}-5)$ und $(2\sqrt{10}+5)$ miteinander vertauschen, ν_3 durch $-\nu_3$ und S'_{ν_3,ν_4} durch S''_{ν_3,ν_4} zu ersetzen. Wie aus dem Hilfssatz 2 hervorgeht, kann G nun überdies noch von dem Hyperbelbogen $x_1(x_2+\nu_1+\nu_2)=U$ begrenzt werden. Mit diesen Modifikationen bleibt bis (71) mit Ausnahme der unteren Abschätzungen in (47), die nicht notwendig zu gelten brauchen, alles richtig. Zur Behandlung der Integrale über die $G_{\lambda,\mu}$ setzen wir $\overline{F}(x_1,x_2)=\Phi(\xi_1,\xi_2)$,

$$x_1=\xi_1, \qquad x_2=N_1^{-1}N_2\xi_1+\xi_2, \tag{77}$$

also wegen $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}=1$

$$\iint\limits_{G_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i\overline{F}(x_1,x_2)}\,dx_1\,dx_2=\iint\limits_{G'_{\lambda,\mu}} e^{2\pi i\Phi(\xi_1,\xi_2)}\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

wobei $G'_{\lambda,\mu}$ das Bild von $G_{\lambda,\mu}$ in der (ξ_1,ξ_2)-Ebene bezeichnet. Unter Benutzung der bereits erkannten Abschätzungen von $F(x_1,x_2)$ und bei Beachtung der Invarianz der Hesseschen Determinante von $F(x_1,x_2)$ in (67) gegenüber (77) findet man alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 mit den in (46), (48), (65), (66) und (72) definierten Größen $M, r_j, j=0,1,2,3,4$, erfüllt. Daher verläuft die weitere Rechnung wie bei S'_{ν_3,ν_4} und liefert

$$S''_{\nu_3,\nu_4}=O\left(u^{-\frac{1}{38}}N_1^{\frac{49}{38}}N_2^{\frac{34}{38}}\log^{-\frac{10}{9}}u\,(\nu_1\nu_2\nu_3)^{-\frac{1}{2}}\nu_4^{-1}\right), \qquad \nu_4\geqq 1. \tag{78}$$

Ist jedoch $\nu_4=0$, so haben wir außer in (43) durchweg ν_3 durch $-\nu_3$ zu ersetzen. Nach Hilfssatz 2 ist der fragliche Hyperbelbogen hier $x_1(x_2+\nu_1+\nu_2)=U$. Vertauschen wir noch in (47) die Vorzeichen von $F_{x_1^2}$ bzw. $F_{x_1x_2}$, so bleibt bis (57) alles richtig. Wenn wir dann M und r_4 wie in (65) und (72) erklären und $r_0=r_1N_1N_2^{-1}$ setzen, so können wir wegen $\nu_4=0$ leicht alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 in jedem G_μ verifizieren. Dann folgt aber mit (56) und (57)

$$\left\{\begin{aligned} S''_{\nu_3,0}&=O\left((N_1^2r_1^2-1)\left(\frac{N_2\log u}{N_1r_1}+\frac{N_2}{N_1^2r_1^2}\right)\right)=O\left(u^{\frac{1}{2}}\nu_1\nu_2\nu_3N_1^{-\frac{1}{2}}N_2^{-\frac{3}{2}}\log u\right)+\\ &+O(N_2)+O\left(u^{-\frac{1}{2}}(\nu_1\nu_2\nu_3)^{-1}N_1^{\frac{1}{2}}N_2^{\frac{7}{2}}\log u\right)+O\left(u^{-1}(\nu_1\nu_2\nu_3)^{-2}N_1N_2^6\right).\end{aligned}\right. \tag{79}$$

Jetzt folgt aus (32), (76), (78) und (79) bei Beachtung von (36)

$$S_{\nu_2}=O\left(u^{\frac{5}{12}}(N_1N_2)^{\frac{13}{18}}\log^{\frac{5}{18}}u\,(\nu_1\nu_2)^{-\frac{1}{4}}\right)+O\left(u^{-\frac{7}{18}}N_1^{\frac{5}{9}}N_2^{\frac{23}{18}}\log^{\frac{4}{9}}u\,(\nu_1\nu_2)^{-1}\right).$$

Dies verwenden wir weiter in (31) und erhalten wegen (36)

$$S_{\nu_1}=O\left(u^{\frac{17}{34}}(N_1N_2)^{\frac{23}{36}}\log^{\frac{7}{36}}u\,\nu_1^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Setzen wir diese Abschätzung in (30) ein, so folgt schließlich

$$S=O\left(u^{\frac{35}{69}}(N_1N_2)^{\frac{8}{9}}\log^{\frac{1}{69}}u\right). \tag{80}$$

Zum Beweise von (80) haben wir (38) und (39) als erfüllt vorausgesetzt. Gilt (38) nicht, so erhalten wir wegen (25), (23) und (28) in trivialer Abschätzung

$$S = O\left(N_1 (N_2' - N_2)\right) = O(N_1 \varrho_3) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} (N_1 N_2)^{\frac{17}{18}}\right) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} U^{\frac{1}{18}} (N_1 N_2)^{\frac{8}{9}}\right)$$
$$= O\left((N_1 N_2)^{\frac{8}{9}}\right),$$

so daß dann (80) ebenfalls gilt.

Ist schließlich (39) nicht erfüllt, so folgt mit (29) wie soeben

$$S = O\left(N_2 (N_1' - N_1)\right) = O(N_2 \varrho_4) = O\left(u^{-\frac{1}{6}} (N_1 N_2)^{\frac{17}{18}}\right) = O\left((N_1 N_2)^{\frac{8}{9}}\right),$$

und daher gilt (80) in jedem $G_0 \subseteqq G^*$.

5. Um von der Abschätzung (80) zum Teilerproblem zu gelangen, benötigen wir zunächst einen Hilfssatz über die partielle Summation in zwei Veränderlichen:

Hilfssatz 7[13]). *Es seien a_{μ_1, μ_2} komplexe Zahlen, derart daß mit*

$$s_{m_1, m_2} = \sum_{1 \le \mu_1 \le m_1} \sum_{1 \le \mu_2 \le m_2} a_{\mu_1, \mu_2}$$

für $1 \le m_j \le M_j$, $j = 1, 2$,

$$|s_{m_1, m_2}| \le G$$

gilt. $b(x_1, x_2)$ sei eine reelle, differenzierbare Funktion von x_1 und x_2 mit

$$0 \le b(m_1, m_2) \le H \quad \text{für} \quad 1 \le m_j \le M_j, \qquad j = 1, 2,$$

und jeder der Ausdrücke

$$b_{x_1}(x_1, x_2), \qquad b_{x_2}(x_1, x_2), \qquad b_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$$

sei dort von festem Vorzeichen. Dann ist

$$\left| \sum_{1 \le m_1 \le M_1} \sum_{1 \le m_2 \le M_2} a_{m_1, m_2} b(m_1, m_2) \right| \le 5 G H.$$

Wenden wir diesen Hilfssatz mit $b(x_1, x_2) = (x_1 - N_1 - 1)^{-\frac{3}{4}} (x_2 + N_2 - 1)^{-\frac{3}{4}}$ auf S an, so erhalten wir mit (80) und (25), wenn wir $a_{n_1, n_2} = e^{2\pi i f(n_1 - N_1 - 1,\, n_2 + N_2 - 1)}$ für $(n_1 + N_1 - 1,\ n_2 + N_2 - 1) \in G_0$ und sonst $a_{n_1, n_2} = 0$ setzen,

$$S_1 = \sum_{G_0} \sum \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = O\left(u^{\frac{1}{36}} (N_1 N_2)^{\frac{5}{36}} \log^{\frac{1}{6}} u\right). \tag{81}$$

Jetzt ist nach (22)

$$S_2 = \sum_{G^*} \sum \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = \sum_{q_1} \sum_{q_2} \left(\sum_{\substack{2^{q_1} \le n_1 \le 2^{q_1+1}-1 \\ U_1 \le n_1 \le n_2,\ n_1 n_2 \le U}} \sum_{2^{q_2} \le n_2 \le 2^{q_2+1}-1} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} \right), \tag{82}$$

wobei die q_j, $j = 1, 2$, je $O(\log u)$ Werte durchlaufen. Jede der inneren Doppelsummen ist nach (81), (22) und (23) vom Typus S_1, und daher folgt aus (81)

[13]) l. c. [2]) Lemma α.

und (82)

$$(83)\qquad S_2 = \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ U_1 \le n_1 \le n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = O\left(\sum_{\substack{q_j \\ j=1,2}} u^{\frac{1}{36}} (2^{q_1+q_2})^{\frac{5}{36}} \log^{\frac{1}{9}} u \right) = O\left(u^{\frac{1}{36}} U^{\frac{5}{36}} \log^{\frac{10}{9}} u\right).$$

Wir setzen noch

$$(84)\qquad S_0 = \sum_{n_1 n_2 \le U} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}}$$

und

$$(85)\qquad S_3 = \sum_{n_1 < U_1} \sum_{n_1 \le n_2 \le \frac{U}{n_1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Dann gilt aus Symmetriegründen

$$(86)\qquad S_0 = 2 \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ n_1 \le n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} - \sum_{\substack{n_1 n_2 \le U \\ n_1 = n_2}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = 2 S_2 + 2 S_3 + O(1).$$

Die Abschätzung von S_3 nehmen wir mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes vor:

Hilfssatz 8[14]). *Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, viermal stetig differenzierbar, $\lambda \le |f^{(4)}(x)| \le h\lambda$ in $a \le x \le b$, $b - a \ge 1$. Dann ist*

$$\sum_{a < n \le b} e^{2\pi i f(n)} = O\left(h^{\frac{1}{4}} (b-a) \lambda^{\frac{1}{14}}\right) + O\left((b-a)^{\frac{3}{4}} \lambda^{-\frac{1}{14}}\right).$$

Mit $f(n_2) = f(n_1, n_2) = u^{\frac{1}{2}} n_1^{\frac{1}{2}} n_2^{\frac{1}{2}}$, $1 \le a < b \le 2a$, $h = 16$ und $\lambda = 2^{-4} u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}}$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \sum_{a < n_2 \le b} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} &= O\left(a (u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{14}}\right) + O\left(a^{\frac{3}{4}} (u^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{7}{2}} n_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{14}}\right) \\ &= O\left(u^{\frac{1}{28}} a^{\frac{3}{4}} n_1^{\frac{1}{28}}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{28}} a\, n_1^{-\frac{1}{28}}\right), \end{aligned}$$

und partielle Summation liefert

$$\sum_{a < n_2 \le b} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} = O\left(u^{\frac{1}{28}} n_1^{\frac{1}{28}}\right) + O\left(u^{-\frac{1}{28}} a^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{1}{28}}\right),$$

so daß wir, ähnlich wie in (82),

$$(87)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n_1 \le n_2 \le \frac{U}{n_1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} &= \sum_q \left(\sum_{2^q < n_2 \le 2^{q+1}} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{n_2^{\frac{3}{4}}} \right) \\ &= O\left(u^{\frac{1}{28}} n_1^{\frac{1}{28}} \log u\right) + O\left(u^{-\frac{1}{28}} U^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{2}{7}}\right) \end{aligned} \right.$$

bekommen.

Nach (85) und (87) erhalten wir

$$S_3 = O\left(\sum_{n_1 < U_1} \left(u^{\frac{1}{28}} n_1^{\frac{1}{28} - \frac{3}{4}} \log u + u^{-\frac{1}{28}} U^{\frac{1}{4}} n_1^{-\frac{2}{7} - \frac{3}{4}}\right)\right) = O\left(u^{\frac{1}{28}} U_1^{\frac{2}{7}} \log u\right) + O\left(u^{-\frac{1}{28}} U^{\frac{1}{4}}\right),$$

[14]) TITCHMARSH, E. C.: The Theory of the Riemann Zeta-Function, Theorem 5.13, $k = 4$, Oxford 1951.

so daß sich wegen (21) aus (84), (24), (86) und (83)

$$S_0 = \sum_{n_1 n_2 \leq U} \frac{e^{2\pi i \sqrt{u n_1 n_2}}}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} = O(u^{\frac{1}{36}} U^{\frac{5}{36}} \log^{\frac{10}{9}} u) \tag{88}$$

ergibt.

In der Bezeichnungsweise von (1) gilt nun der

Hilfssatz 9[15]). *Es sei N eine natürliche Zahl, x halbzahlig, $1 \leq N \leq \sqrt{x}$. Dann gilt*

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n_1 n_2 \leq N} \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{x n_1 n_2} - \frac{\pi}{4}\right)}{(n_1 n_2)^{\frac{3}{4}}} + O(x^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \log^2 x).$$

Wir wählen hierin $N = [U]$. Dann folgt mit (88), wenn wir $u = 4x$ setzen,

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}} U^{\frac{5}{36}} \log^{\frac{10}{9}} x) + O(x^{\frac{1}{2}} U^{-\frac{1}{2}} \log^2 x)$$

oder wegen (21)

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{13}{40}} \log^{\frac{30}{23}} x).$$

Nach (1) sieht man, daß die Beschränkung auf halbzahlige x-Werte aufgehoben werden darf, und daher haben wir jetzt (3) vollständig bewiesen.

[15]) l. c. [14]) 267—269. Dort erscheint zwar im Fehlerglied x^{ε} statt $\log^2 x$, doch stellt man dem Beweis folgend leicht fest, daß man die obige Form erhalten kann, wenn man $a = \varepsilon$ und $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ setzt.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. Dezember 1952.)

Uniformisierung

Von Dr. **Rolf Nevanlinna,** Finnische Akademie, Honorarprofessor an der Universität Zürich. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 64.) Mit 22 Abbildungen. X, 391 Seiten. 1953. DM 46.50; Ganzleinen DM 49.50

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Algebraische Funktionen. — Begriff der Riemannschen Fläche. — Funktionentheoretische Grundsätze. — Existenzsätze. — Geschlossene Riemannsche Flächen. — Der Riemannsche Abbildungssatz. — Gruppen von linearen Transformationen. — Uniformisierung. — Schlichtartige Flächen. — Offene Riemannsche Flächen. — Literaturverzeichnis. — Register.

Die vorliegende zusammenfassende Darstellung der Theorie der Uniformisierung ist entstanden auf der Grundlage von Vorlesungen, die der Verfasser an den Universitäten Helsinki und Zürich gehalten hatte. Nach Möglichkeit sind auch die Fortschritte der geometrischen Funktionentheorie der letzten Jahre berücksichtigt worden, vor allem in der Richtung der Theorie der offenen Riemannschen Flächen.

Einführung in die höhere Mathematik

Vorlesungen an der Universität Berlin (1920—1934) von **Georg Feigl †,** bearbeitet und herausgegeben von **Hans Rohrbach,** o. Professor der Mathematik an der Universität Mainz. Mit 19 Abbildungen. VIII, 375 Seiten. 1953.

Ganzleinen DM 26.80

Inhaltsübersicht: **I. Komplexe Zahlen:** Vorbemerkungen über reelle Zahlen. Das Rechnen mit komplexen Zahlen. Das Rechnen mit endlichen Summen und Produkten. — **II. Zahlenreihen und Vektoren:** Das Rechnen mit Zahlenreihen. Deutung reeller Zahlenreihen als Vektoren für $n = 1, 2, 3$. Deutung von Zahlenreihen als Vektoren im allgemeinen Fall. — **III. Determinanten:** Determinanten 2. Ordnung. Definition der Determinante 3. Ordnung. Das Vorzeichen einer Permutation. Definition und Eigenschaften der Determinante n-ter Ordnung. Einige Sätze über Determinanten. — **IV. Polynome und rationale Funktionen:** Polynome in einer Veränderlichen. Teilbarkeitseigenschaften. Anwendungen (Partialbruchzerlegung). Polynome in mehreren Veränderlichen. — **V. Systeme von linearen Gleichungen:** Allgemeine Sätze über die Lösungen eines Systems linearer Gleichungen. Der Hauptfall $m = n$ eines linearen Gleichungensystems. Der Rang einer Matrix. Der allgemeine Fall eines homogenen Gleichungensystems. Der allgemeine Fall eines inhomogenen Gleichungensystems. — **VI. Der Gruppenbegriff:** Das Rechnen mit Permutationen. Definition der Gruppe. Einige Eigenschaften einer Gruppe. — **VII. Matrizen und lineare Substitutionen:** Quadratische Matrizen. Rechteckige Matrizen. Lineare Substitutionen. — **VIII. Grundbegriffe der Mengenlehre:** Verknüpfung und Abbildung von Mengen. Abzählbare und nichtabzählbare Mengen. Geordnete Mengen. — **IX. Die ganzen rationalen Zahlen:** Die Menge der natürlichen Zahlen. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Die Addition der ganzen Zahlen. Die Multiplikation der ganzen Zahlen. — **X. Die rationalen Zahlen:** Das Rechnen mit rationalen Zahlen. Der Bereich der rationalen Zahlen. Folgerungen für das Buchstabenrechnen. Mehrgliedrige Ausdrücke. — **XI. Die reellen Zahlen:** Die positiven reellen Zahlen. Der Bereich aller reellen Zahlen. Stetigkeit der Menge der reellen Zahlen. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Kosmische Strahlung

Vorträge gehalten im Max Planck-Institut für Physik, Göttingen. Zweite Auflage. Von L. Biermann, P. Budini, J. Buschmann, M. Deutschmann, E. Freese, K. Gottstein, R. Hagedorn, W. Heisenberg, F. G. Houtermans, H. Jahn, G. Lüders, R. Lüst, W. Macke, H. M. Mayer, P. Meyer, G. Molière, R. Oehme, K. Ott, W. Paul, F. Sauter, A. Schlüter, K. Symanzik, M. Teucher, C. F. v. Weizsäcker, K. Wirtz, B. Zumino. Herausgegeben von Professor Dr. **Werner Heisenberg,** Direktor des Max Planck-Instituts für Physik, Göttingen. Mit 256 Abbildungen und einer Ausschlagtafel. VIII, 620 Seiten. Ganzleinen DM 78.—

Inhaltsübersicht: Einführung: Übersicht über den heutigen Stand der Kenntnisse von der kosmischen Strahlung. — **Die Herkunft der kosmischen Strahlung:** Einfluß des Erdmagnetfeldes. Empirische Daten über die Primärkomponente. Zeitliche Schwankungen. Die Entstehung der Höhenstrahlung. — **Nukleonen und π-Mesonen:** Die Nukleonenkomponente in der Atmosphäre. „Sterne" in photographischen Platten. Durchdringende Schauer (Zählrohr- und Nebelkammermessungen). Stöße in Ionisationskammern. Empirisches über Eigenschaften der π-Mesonen. π^0-Mesonen und γ-Strahlung. Theorie der Explosionsschauer. Kaskaden im Atomkern. Kernverdampfungen in Photoplatten. Theorie der Verdampfungsprozesse bei Kernexplosionen. Neutronen in der Atmosphäre. Schwere instabile Teilchen. — **μ-Mesonen:** Historisches. Masse des μ-Mesons. Zerfall und Einfang der μ-Mesonen. Theorie des μ—e-Zerfalls und des μ-Einfangs. Kernstöße schneller μ-Mesonen. μ-Mesonen in der Atmosphäre. Kosmische Strahlung unter Grund. — **Elektronen-Lichtquantenkomponente:** Überblick über die Elektronen-Lichtquantenkomponente. Die Einzelprozesse der Elektronen und Lichtquanten. Ergebnisse der Kaskadentheorie. Empirisches über Elektronen und Photonen. Direkte Paarerzeugung durch Elektronen. — **Das Zusammenspiel der Komponenten:** Qualitativer Überblick. Theorie der Nukleonenkaskade. Die Entwicklung der Nukleonen-Mesonenkomponente in der Atmosphäre. Allgemeine Theorie der Elektronen-Photonenkaskade. Die Entwicklung der Elektronen-Photonenkomponente in der Luft. Experimentelles über große Luftschauer. Eindimensionale Theorie der großen Luftschauer. Winkel- und räumliche Verteilung der Elektronenkomponente der großen Luftschauer. **Anhang:** Die theoretischen Grundlagen für Streuung und Bremsung geladener Teilchen. Streuung und Bremsung energiereicher Elektronen. Die Durchführung und Auswertung von Messungen in kernphotographischen Emulsionen. Ergänzungen zur Theorie der Elektronen-Photonenkaskade und der großen Luftschauer. Klassische Feldtheorie der Mesonen. Quantisierte Feldtheorie der Mesonen. Formeln, Tabellen und Kurven. — **Verzeichnis der Abkürzungen und Formelzeichen. — Literatur- und Sachverzeichnis.**

Aus dem Vorwort zur 2. Auflage: In den zehn Jahren, die seit dem Erscheinen der 1. Auflage verstrichen sind, haben die Kenntnisse von der kosmischen Strahlung eine außerordentliche Erweiterung und Vertiefung erfahren. Nach dem Ende des Krieges sind in jedem Jahr Hunderte von Arbeiten veröffentlicht worden, die über neue Erfahrungen oder neu entwickelte experimentelle Methoden berichten, oder die das theoretische Verständnis der Zusammenhänge erweitern. So ist es notwendig geworden, das vorliegende Buch praktisch neu zu schreiben, um der Fülle des hinzugekommenen Materials einigermaßen gerecht zu werden. Das Bild, das die 1. Auflage vom Gesamtgebiet der kosmischen Strahlung entworfen hatte, mußte an vielen Stellen ergänzt und in einigen Punkten grundsätzlich geändert werden. Die wichtigsten Verbesserungen sind durch die Entdeckung der neuen Mesonenarten bedingt, die, wie wir jetzt wissen, in der Genetik der kosmischen Strahlung eine entscheidende Rolle spielen. Ferner ist neu hinzugekommen das Kapitel I von der Entstehung der kosmischen Strahlung, für die es erst seit einigen Jahren im Zusammenhang mit anderen astrophysikalischen Erscheinungen eine plausible Erklärung gibt. Die Reihenfolge der übrigen Kapitel ist so gewählt worden, wie es den heutigen Vorstellungen von der Genetik der Strahlenarten entspricht. Das Schlußkapitel V schildert das Zusammenwirken der verschiedenen Komponenten nach einer verallgemeinerten Kaskadentheorie. Ein Anhang enthält Ergänzungen, die teils theoretische oder mathematische Einzelfragen, teils experimentelle Methoden zum Gegenstand haben. Ebenso wie die 1. Auflage ist auch die 2. aus einem Kolloquium des Max Planck-Instituts für Physik (des früheren Kaiser Wilhelm-Instituts für Physik) hervorgegangen. Die einzelnen Abschnitte entsprechen den Kolloquiumsvorträgen, die durch die ihnen folgenden Diskussionen ergänzt und verbessert wurden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.